(*Texte public*)

Résumé : On présente un modèle unimensionnel de déposition de particules, que l'on assimile à une chute de neige, pour lequel on recherche le comportement asymptotique de la hauteur.

Mots clefs : Lois des grands nombres, loi de Poisson, loi géométrique.

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

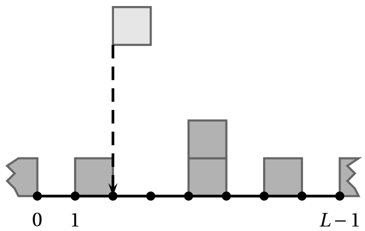
1. Déposition balistique en une dimension d'espace

Les modèles de déposition sont associés à des représentations de processus de cristallisation, dans lequel des petits cristaux libres se promènent aléatoirement dans l'espace jusqu'à atteindre le bord d'un germe de cristallisation. Ainsi le germe initial grossit petit à petit, et on peut se poser des questions typiques sur la rapidité de ce processus ainsi que sur la forme asymptotique du cristal que l'on obtient en temps long. Ce modèle, sous cette formulation floue, présente beaucoup de points difficiles mathématiquement, nous allons donc en proposer une version simplifiée, le modèle de *déposition balistique*, que nous assimilerons à une chute de neige.

Dans les modèles que nous étudierons, on se place en une seule dimension d'espace où se produit la chute de neige, et par souci de simplification on supposera que cet espace est le cercle $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ (où l'on suppose que $L \geqslant 5$) pour lequel on se donne la relation de voisinage $k \sim l$ si $k - l \in \{-1, 0, 1\} \mod L$.
(Dans tout le texte, les intervalles ouverts de la droite réelle seront notés (a, b), les semi-ouverts $(a, b]$ ou $[a, b)$, et les fermés $[a, b]$.)

1.1. *Un exemple simple : les flocons carrés*

Dans ce premier modèle, les flocons sont des carrés $(0,1) \times [0,1]$ qui tombent au dessus des sites de $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ de la façon suivante :



— il tombe un flocon par unité de temps ;
— son point de chute est choisi selon la loi uniforme sur $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$.

On va noter H_n la hauteur maximale après la chute des n premiers flocons, et $(Y_{0,n},\dots,Y_{L-1,n})$ les hauteurs au dessus des L sites. On a alors :

Proposition 1. *Le vecteur aléatoire $(Y_{0,n},\dots,Y_{L-1,n})$ suit une loi multinomiale de paramètres n et $(1/L,\dots,1/L)$:*

$$\forall k_i \in \mathbb{N} \text{ tels que } k_0+\cdots+k_{L-1}=n,\ P(Y_{0,n}=k_0,\dots,Y_{L-1,n}=k_{L-1}) = \frac{n!}{k_0!\dots k_{L-1}!}L^{-n},$$

La hauteur H_n est alors donnée comme $H_n = \max(Y_{0,n},\dots,Y_{L-1,n})$, sa loi est donc entièrement déterminée. On peut en particulier donner le résultat asymptotique suivant :

Proposition 2. *Lorsque n tend vers l'infini on a les convergences presque sûres suivantes :*

$$\forall i \in \mathbb{Z}/L\mathbb{Z},\ \frac{Y_{i,n}}{n} \to \frac{1}{L},\ \text{et } \frac{H_n}{n} \to \frac{1}{L}.$$

Remarquons que H_n s'exprime comme un maximum de L variables aléatoires *dépendantes*, en revanche, si l'on se donne une variable aléatoire N de loi de Poisson de paramètre λ (que l'on fera tendre vers l'infini), alors le vecteur aléatoire $(Y_{0,N},\dots,Y_{L-1,N})$ est égal en loi à un vecteur aléatoire $(N_0,\dots,N_{L-1})$ où les variables aléatoires $(N_i)_{i\in\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}}$ sont indépendantes identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre λ/L. On en déduit donc une expression de la hauteur H_N comme maximum de ces L variables indépendantes, sa loi devient alors plus simple.

1.2. *Le modèle aéré*

Dans le modèle précédent, le manteau neigeux est dense : il ne comporte pas de trous, ce qui contredit l'expérience courante, nous proposons donc un second modèle qui prend en compte la possibilité de capturer de l'air. Au dessus de chacun des sites tombent maintenant des flocons de neige, que l'on assimilera à des briques $(-1,1)\times[0,1]$, aux instants $n \in \mathbb{N}^\star$. On définit une fonction $(n,i) \mapsto Y_{i,n}$ des deux variables $n \in \mathbb{N}^\star$ et $i \in \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ représentant la hauteur du manteau neigeux à l'instant n et au site i (voir figure 1) ; pour cela on initialise cette fonction par $Y_{i,0}=0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$, et lorsqu'un flocon tombe à l'instant $n>0$ au site $k \in \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$, la hauteur est modifiée par la procédure suivante : le flocon se dépose sur le (ou les) flocon(s) présent(s) et la hauteur est alors modifiée en

$$Y_{k,n} = \max(Y_{k-1,n-1}, Y_{k,n-1}, Y_{k+1,n-1}) + 1,\ \text{et } \forall i \neq k,\ Y_{i,n} = Y_{i,n-1}.$$

(Les sites $k \pm 1$ sont à comprendre $k \pm 1 \mod L$.)
On a donc une suite de hauteurs $(Y_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui en tout site k est croissante, et qui représente l'altitude du sommet du dernier flocon tombé avant l'instant n exactement au dessus du site k (et non pas la hauteur effective du manteau neigeux comme on peut le constater sur la figure 1).

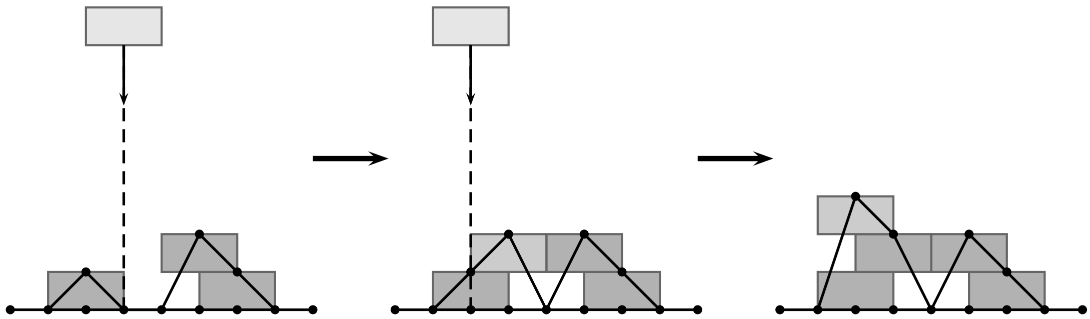


FIGURE 1. Chute de deux flocons et évolution de la fonction hauteur.

On note $H_n = \max\{Y_{k,n},\ k \in \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}\}$ la hauteur maximale à l'instant n de la couche de neige, et le but est encore d'obtenir des estimations asymptotiques sur cette hauteur maximale en fonction de n.

Le résultat principal sur ce modèle est l'existence d'un comportement asymptotique de la hauteur :

Théorème 1. *Lorsque n tend vers l'infini on a convergence presque sûre de H_n/n vers une constante $\gamma = g/L$, où*

$$3 \leqslant g \leqslant 7.1.$$

La preuve de ce théorème est en trois étapes, que nous détaillons dans les parties suivantes :
- — convergence presque sûre par un argument de sous-additivité (partie 2) ;
- — minoration par comparaison avec un modèle simplifié (partie 3.1) ;
- — majoration par une estimation de Tchebychev exponentielle sur un modèle continu (partie 3.2).

2. Existence de la limite par sous-additivité

Les arrivées des flocons se produisent aux instants $n \in \mathbb{N}^\star$, et en les localisations $(M_n)_{n\geqslant 0}$ indépendantes de loi uniforme sur $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$. On note H_n la hauteur maximale atteinte après n pas de temps, et $H(m, m+n]$ la hauteur atteinte si l'on ne compte que les flocons arrivés entre les instants $m+1$ et $m+n$: c'est-à-dire que si l'on exprime H_n comme une fonction $H^{(n)}$ des n variables aléatoires $M_1, \ldots, M_n$, on a

$$H_n = H^{(n)}(M_1, \ldots, M_n) \qquad \text{et} \qquad H(m, n+m] = H^{(n)}(M_{m+1}, \ldots, M_{m+n}).$$

Théorème 2. *Lorsque n tend vers l'infini, H_n/n converge presque sûrement vers la constante $\gamma = \inf_{n\in\mathbb{N}^\star} E[H_n]/n$.*

Indications de preuve : Nous allons utiliser une propriété de sous-additivité : énonçons tout d'abord le résultat suivant, dont nous ne donnons pas la preuve,

Lemme 1. *Presque sûrement, pour tous $n, m \in \mathbb{N}^\star$,*

$$H_{n+m} = H(0, n+m] \leqslant H(0,n] + H(n, n+m].$$

Fixons maintenant $N \in \mathbb{N}^\star$, alors pour $n = qN + r$ (division euclidienne), on vérifie alors que

$$\begin{aligned} H_n &\leqslant \sum_{s=1}^{q} H((s-1)N, sN] + H(qN, qN+r], \\ &\leqslant \sum_{s=1}^{q} H^{(N)}(M_{(s-1)N+1}, \dots, M_{sN}) + H(qN, qN+r], \\ \frac{H_n}{n} &\leqslant \frac{q}{n}\frac{1}{q}\sum_{s=1}^{q} H_{s,N} + \frac{N}{n}, \end{aligned}$$

où les variables $(H_{s,N})_{1\leqslant s\leqslant q}$ sont indépendantes identiquement distribuées, de même loi que H_N, et la majoration du reste provient du fait immédiat $H(u,v] \leqslant (v-u)$.

Il suffit alors d'appliquer la loi forte des grands nombres pour obtenir

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{H_n}{n} \leqslant \frac{E[H_N]}{N} \text{ presque sûrement.}$$

La conclusion du théorème 2 est alors la conséquence des raisonnements suivants :

— la suite $(E[H_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est (déterministe) sous-additive, donc $E[H_n]/n$ converge vers γ ;

— par le lemme de Fatou,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{E[H_n]}{n} \le E\left[\limsup_{n\to+\infty} \frac{H_n}{n}\right],$$

et donc

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{H_n}{n} = \gamma \text{ presque sûrement.}$$

Il reste à démontrer que la limite inférieure converge vers la même limite ; nous l'admettrons. □

3. Estimations sur g

La minoration de g s'obtient à partir d'une minoration simple sur γ, en regardant un modèle de croissance plus lente, en revanche la majoration de g sera une conséquence d'une estimation directe sur un processus en temps continu.

3.1. *Minoration*

Faisons la remarque suivante : la hauteur de la chute de neige croît moins vite si l'on efface les flocons qui ne la font pas directement croître, c'est-à-dire si l'on efface tous les flocons qui ne tombent pas sur le dernier étage de la tour posée sur le premier flocon (voir la figure 2 ci-dessous).

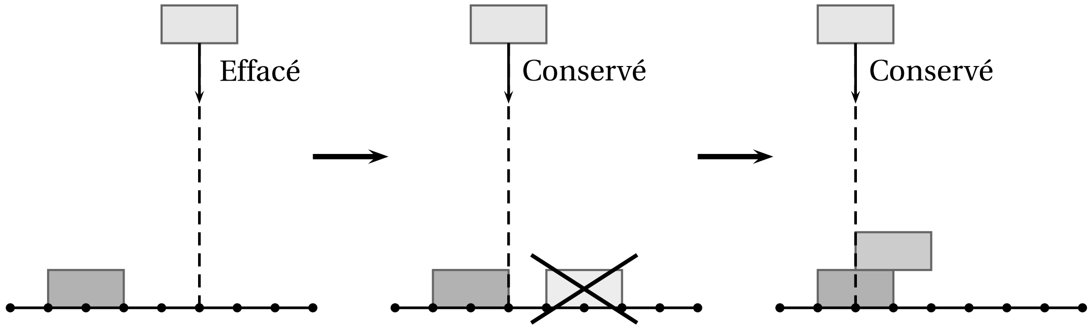


FIGURE 2. Effacements de flocons.

On note G_n la hauteur maximale de la tour de flocons ainsi construite au temps n :

$$G_0 = 0,$$
$$G_{n+1} = \begin{cases} G_n + 1 & \text{si le } (n+1)\text{-ième flocon est conservé,} \\ G_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors il est clair que le temps S_m pour construire une hauteur de m en tenant compte des effacements est donné par le lemme suivant :

Lemme 2. *Soit* $\tau_1, \ldots, \tau_{m-1}$ *des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi géométrique :*

$$P(\tau_i = k) = \frac{3}{L}\left(1 - \frac{3}{L}\right)^{k-1},\ k \in \mathbb{N}^\star.$$

Alors

$$S_m := \inf\{n \in \mathbb{N}^\star \text{ tel que } G_n \geq m\} \stackrel{\text{loi}}{=} 1 + \tau_1 + \cdots + \tau_{m-1}.$$

Comme il est clair que $H_{S_m} \geqslant G_{S_m} = m$ on en déduit facilement une minoration, en effet

$$\begin{aligned} 1 \leq \frac{H_{S_m}}{m} &= \frac{H_{S_m}}{S_m} \times \frac{S_m}{m}, \\ &\to \gamma \times E[\tau_1] \text{ presque sûrement lorsque } m \to +\infty, \end{aligned}$$

puisque S_m tend presque sûrement vers $+\infty$ lorsque m tend vers $+\infty$, ce qui implique que

$$\gamma \geqslant \frac{1}{E[\tau_1]} = \frac{3}{L}, \text{ et donc } g \geqslant 3.$$

3.2. *Majoration*

Nous introduisons dans cette partie un processus en temps continu : pour chaque site nous disposons d'un processus de Poisson de paramètre 1, ces processus sont indépendants, et correspondent aux instants de chute d'un flocon sur le site en question, la croissance du manteau neigeux se déroule selon le même procédé que dans le modèle aéré. Il tombe donc en moyenne L flocons par unité de temps.
Comme dans le cas discret en temps, introduisons la fonction $s \mapsto \widetilde{H}(t, t+s]$ définie pour $t, s \geqslant 0$ comme la hauteur de la chute de neige ne considérant *que* les flocons tombés dans l'intervalle de temps $(t, t+s]$.
On admettra que l'on a la convergence suivante :

Théorème 3. *Lorsque t tend vers l'infini, presque sûrement $\widetilde{H}(0,t]/t$ tend vers g, où g est la même constante que dans le théorème 1.*

Fixons un entier $m \geq 2$, et posons
— $T_0(m) = 0$,
— $T_{j+1}(m) = \inf\{t \geqslant 0 \ : \ \widetilde{H}(T_j(m), T_j(m)+t] = m\}$.
Ce sont des variables aléatoires identiquement distribuées, indépendantes.
Par sous-additivité on a $\widetilde{H}(0, T_1(m)+\cdots+T_j(m)] \leqslant jm$, et donc par la loi forte des grands nombres presque sûrement on obtient

$$g \leqslant \liminf_{j\to+\infty} \frac{jm}{T_1(m)+\cdots+T_j(m)} = \frac{m}{E[T_1(m)]}.$$

Utilisons la remarque suivante : pour tout $a > 0$, on a

$$E[T_1(m)] \geqslant am(1 - P(T_1(m) < am)).$$

Étudions cet événement $\{T_1(m) < am\}$: il correspond à l'existence d'un chemin “connexe” de flocons de hauteur m (une tour) tels qu'ils soient tombés en un temps inférieur à am. Il existe $L3^{m-1}$ telles tours, et le temps nécessaire à la complétion de n'importe laquelle de ces tours est supérieur au temps nécessaire à l'arrivée de m flocons consécutifs, c'est-à-dire à la somme W_m de m variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre 1 indépendantes.
On a donc la relation suivante :

$$P(T_1(m) < am) \leqslant L3^{m-1} P(W_m < am),$$

en utilisant l'inégalité de Tchebychev exponentielle on obtient donc pour tout $\mu > 0$:

$$\begin{aligned} P(T_1(m) < am) &\leqslant L3^{m-1} P(W_m < am), \\ &\leqslant L3^{m-1} E\left[\exp(\mu(am - W_m))\right], \\ &\leqslant L3^{m-1} \exp(\mu am) \left(\frac{1}{1+\mu}\right)^m, \end{aligned}$$

en minimisant le terme de droite en fonction de μ on obtient la borne

$$(L/3)\exp(m(1 - a + \log a + \log 3)),$$

le terme à l'intérieur de l'exponentielle est négatif pour a suffisamment petit ($a < a_0$), ce qui en faisant tendre m vers l'infini donne l'estimation

$$\liminf_{m\to+\infty} \frac{1}{m} E[T_1(m)] \geqslant a,$$

et donc *a fortiori*

$$g \leqslant 1/a.$$

Un calcul approximatif de la solution a_0 de $1 - a + \log(3a) = 0$ donne la majoration $g \leqslant 7.1$.

Suggestions pour le développement

► *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

- *Aspects mathématiques.* On pourra compléter les preuves des résultats suivants :
  - modèle carré : propositions 1 et 2.
  - modèle aéré : théorème 2, lemmes 1 et 2, théorème 3.
- *Programmes et simulations.*
  - Simuler la chute des flocons carrés de la partie 1.1, estimer la loi de H_n (n fixe) et la loi de H_N lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.
  - On pourra simuler des variables géométriques et donner un estimateur de leur espérance, en liaison avec le lemme 2.
  - Proposer des méthodes d'estimation numérique de $E[T_1(m)]$ en fonction de m.
  - Vérifier graphiquement et numériquement la validité de la convergence dans le théorème 1, quelle estimation numérique obtient-on sur la quantité g ? Est-ce cohérent avec les estimations proposées dans le texte ?
  - Proposer une méthode numérique pour résoudre l'équation $1 - a + \log(3a) = 0$.
- *Modélisation.*
  - Proposer une approche markovienne de l'évolution dans le temps pour le processus $(Y_{k+1,n} - Y_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}}$. Que peut-on dire sur le processus ainsi construit : est-ce une chaîne de Markov, irréductible, existe-t-il une unique mesure invariante ?
  - Quel est à votre avis l'importance du biais apporté par un modèle sur le cercle $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ par rapport à un modèle sans périodicité ? Peut-on donner une version de ce modèle directement dans $\mathbb{Z}$?