(*Texte public*)

Résumé : On étudie plusieurs modèles du déplacement des fourmis. On tente en particulier de comprendre comment l'algorithme aléatoire qu'elles utilisent les amène à choisir un chemin parmi tous ceux leurs sont offerts et à s'y tenir.

Mots clefs : Marches au hasard, martingales.

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

Certains insectes comme les fourmis utilisent pour se reconnaître des signaux chimiques. Ainsi, chaque fourmi porte sur son corps et dépose partout où elle passe des quantités infinitésimales d'une substance, appelée phéromone, qui est caractéristique de la fourmilière à laquelle elle appartient. Elle peut ainsi sentir si le chemin qu'elle suit a déjà été emprunté par une de ses congénères ou non, ou s'il a été emprunté par un individu d'une autre fourmilière. Ceci a des conséquences qualitatives importantes sur la façon dont les fourmis se déplacent et nous nous proposons d'étudier quelques modèles simples de ce type de phénomènes.

1. Le modèle

Considérons la situation où, pour se rendre d'un endroit à un autre, les individus d'une fourmilière ont le choix entre deux trajets disjoints. Chaque fois qu'une fourmi emprunte l'un des deux chemins, elle y dépose une certaine quantité de phéromone et cette quantité peut éventuellement dépendre de la quantité déjà présente sur le chemin. Nous supposerons que chaque fourmi choisit de façon aléatoire le chemin qu'elle emprunte, en affectant à chacun une probabilité qui est proportionnelle à la quantité de phéromone qui y est présente.
Notons a et b les deux chemins possibles. Nous modéliserons les trajets successifs suivis par les fourmis par une suite $X = (X_1, X_2, \ldots)$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{a, b\}$. Pour chaque $n \geq 1$, notons α_n et β_n les quantités de phéromones présentes respectivement sur les chemins a et b après le n-ième trajet. Ce sont deux variables aléatoires réelles que nous supposerons strictement positives pour éviter d'avoir à discuter des cas particuliers. Par convention, les nombres α_0 et β_0 représentent les quantités de phéromones présentes au début de l'expérience et font donc partie des données du problème. L'autre donnée est

une fonction $r : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, dite de renforcement, qui modélise la façon dont les fourmis déposent leur phéromone pendant le trajet. Nous ferons l'hypothèse que la quantité de phéromone présente sur un chemin après le passage d'une fourmi est l'image par r de la quantité présente avant son passage. Il semble donc raisonnable de supposer que $r(x) \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Nous nous intéresserons à trois fonctions particulières, qui sont définies par

$$\forall x > 0\,,\ r_0(x) = x\,,\ r_1(x) = x+1\,,\ r_2(x) = \rho x, \tag{1}$$

où $\rho \in]1, +\infty[$ est un paramètre réel.
On construit les variables aléatoires X_n, α_n, β_n par récurrence sur n. Sachant α_n et β_n, les variables X_{n+1}, α_{n+1} et β_{n+1} sont indépendantes de $X_1, \ldots, X_n, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ et de loi donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[X_{n+1} = a, \alpha_{n+1} = r(\alpha_n), \beta_{n+1} = \beta_n \middle| \alpha_n, \beta_n\right] &= \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n} \\
\mathbb{P}\left[X_{n+1} = b, \alpha_{n+1} = \alpha_n, \beta_{n+1} = r(\beta_n) \middle| \alpha_n, \beta_n\right] &= \frac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n}.
\end{aligned}$$

Notons que la suite de variables aléatoires $X = (X_1, X_2, \ldots)$ n'est pas en général une chaîne de Markov. En revanche, la suite des triplets $((X_n, \alpha_n, \beta_n))_{n\geq 1}$ en est une.
Dans l'étude du modèle, nous allons nous intéresser en particulier au nombre total de passages sur chacun des deux chemins avant un temps donné. Définissons les deux quantités suivantes :

$$\forall n \geq 1\,,\ A_n = \#\{k \in \{1, \ldots, n\} : X_k = a\} \ \text{ et } \ B_n = \#\{k \in \{1, \ldots, n\} : X_k = b\}.$$

Elles satisfont la relation $A_n + B_n = n$. Nous poserons $A_0 = B_0 = 0$.

2. Comportement en absence de renforcement

Étudions le comportement de la suite $X = (X_1, X_2, \ldots)$ lorsque $r(x) = r_0(x) = x$. Dans ce cas, on a pour tout $n \geq 1$ les égalités $\alpha_n = \alpha_0$ et $\beta_n = \beta_0$. La suite X est donc une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi sur $\{a, b\}$. Pour simplifier, nous supposerons que les fourmis n'ont pas de préférence a priori pour l'un des deux chemins et ceci se traduit par l'égalité $\alpha_0 = \beta_0$.

Théorème 1. *Supposons que $r(x) = x$ et $\alpha_0 = \beta_0$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.*
1. $\mathbb{P}\left[A_n \underset{n\to\infty}{\sim} B_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}\right] = 1.$
2. $\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} |A_n - B_n| = +\infty\right] = 1.$
3. $\mathbb{P}\left[\liminf_{n\to\infty} |A_n - B_n| = 0\right] = 1.$

Démonstration. Démontrons la deuxième assertion. La suite $(A_n - B_n)_{n\geq 0}$ a la loi d'une marche aléatoire symétrique issue de 0 dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire la loi de la suite des sommes partielles $(Z_1 + \ldots + Z_n)_{n\geq 0}$ où $(Z_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. Des estimées qu'on pourra admettre permettent alors d'établir que pour tout m fixé appartenant à $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(\forall n \geq 1, |A_n - B_n| \leq m) = 0.$$

Comme une réunion dénombrable d'évènements de mesure nulle est de mesure nulle, on trouve

$$\mathbb{P}(\exists m \geq 0, \forall n \geq 1, |A_n - B_n| \leq m) = 0,$$

ce qui entraîne le résultat.
La troisième assertion est équivalente au fait que 0 est un état récurrent pour la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$. □

3. Renforcement linéaire

Considérons maintenant le cas où $r(x) = r_1(x) = x+1$. Dans ce cas, on a les égalités $\alpha_n = \alpha_0 + A_n$ et $\beta_n = \beta_0 + B_n$.

Théorème 2. *Supposons que $r(x) = x+1$ et $\alpha_0 = \beta_0 = 1$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.*
1. Les suites de variables aléatoires $\left(\frac{1+A_n}{n+2}\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\frac{1+B_n}{n+2}\right)_{n\geq 0}$ sont des martingales bornées et presque sûrement convergentes.
2. Il existe une variable aléatoire U de loi uniforme dans $[0,1]$ telle qu'on ait presque sûrement les équivalents $A_n \underset{n\to\infty}{\sim} Un$ et $B_n \underset{n\to\infty}{\sim} (1-U)n$.

Démonstration. Grâce à la relation $A_n + B_n = n$ valable pour tout $n \geq 0$, il suffit de démontrer les résultats qui concernent $(A_n)_{n\geq 0}$.
L'égalité $\mathbb{E}[A_{n+1}|A_n] = \dfrac{1+A_n}{n+2}(A_n+1) + \dfrac{1+n-A_n}{n+2}A_n$ entraîne le fait que $\left(\frac{1+A_n}{n+2}\right)_{n\geq 0}$ soit une martingale. Comme $\frac{1+A_n}{n+2}$ appartient à l'intervalle $[0,1]$, cette martingale est bornée et, d'après l'un des théorèmes de convergence pour les martingales, elle converge donc presque sûrement. Ceci prouve la première assertion. La deuxième est vraie si l'on prend pour U la limite presque sûre lorsque n tend vers $+\infty$ de $\frac{1+A_n}{n+2}$. Pour déterminer la loi de U, on peut montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, la loi de $\frac{1+A_n}{n+2}$ est uniforme sur l'ensemble $\{\frac{1}{n+2}, \frac{2}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+2}, \frac{n+1}{n+2}\}$. □
Ce comportement est assez différent de celui observé en absence de renforcement, mais il montre que notre modèle n'est pas satisfaisant. En effet, dans la nature, on constate en général que les fourmis finissent par choisir un chemin qu'elles empruntent exclusivement. Ici, il ne se produit rien de tel : les fourmis se répartissent entre les deux chemins et, asymptotiquement, une proportion non nulle d'entre elles emprunte chaque chemin.

4. Renforcement géométrique

Pour tenter de remédier au défaut du modèle précédent, nous allons modifier la fonction de renforcement que nous utilisons. Si le passage d'une fourmi sur un chemin augmente

énormément la quantité de phéromone présente sur ce chemin, les fourmis qui la suivront auront une tendance très forte à emprunter le même chemin. Choisissons un paramètre réel $\rho > 1$ et considérons la fonction $r(x) = r_2(x) = \rho x$. Pour simplifier, supposons que $\alpha_0 = \beta_0 = 1$.
Avec cette définition de r, nous avons pour tout $n \geq 1$ les égalités $\alpha_n = \rho^{A_n}$ et $\beta_n = \rho^{B_n}$.

Théorème 3. *Soit $\rho > 1$. Supposons que $r(x) = \rho x$ et $\alpha_0 = \beta_0 = 1$. Alors presque sûrement, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $X_n = X_N$. Autrement dit, presque sûrement, la suite $X = (X_1, X_2, \dots)$ est constante à partir d'un certain rang. De plus, sa valeur limite a la même probabilité $\frac{1}{2}$ de valoir a ou b.*

C'est le comportement que nous espérions obtenir. Pour démontrer ce théorème, nous allons en fait démontrer qu'avec probabilité 1, la suite des variables aléatoires $\Delta_n = |A_n - B_n|$ est croissante à partir d'un certain rang. Commençons par démontrer un résultat un peu plus faible.

Proposition 1. *Sous les hypothèses du théorème 3, on a*

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} |A_n - B_n| = +\infty\right] = 1.$$

Définissons une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $f(0) = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho^{-\frac{k(k+1)}{2}}$.
Nous avons le résultat suivant.

Lemme 1. *La suite de variables aléatoires $\big(f(|A_n - B_n|)\big)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale bornée et presque sûrement convergente.*

Démonstration. Posons $\Delta_n = |A_n - B_n|$. La suite de variables aléatoires $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ vérifie $\Delta_0 = 0$ et les égalités

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\Delta_{n+1} = \Delta_n + 1 | \Delta_0, \dots, \Delta_n] &= \frac{\rho^{\Delta_n}}{1+\rho^{\Delta_n}} \mathbf{1}_{\Delta_n \neq 0} + \mathbf{1}_{\Delta_n = 0}. \\
\mathbb{P}[\Delta_{n+1} = \Delta_n - 1 | \Delta_0, \dots, \Delta_n] &= \frac{1}{1+\rho^{\Delta_n}} \mathbf{1}_{\Delta_n \neq 0}.
\end{aligned}$$

Ces relations et l'égalité

$$\forall n \geq 1\,,\ \rho^n \big(f(n+1) - f(n)\big) = f(n) - f(n-1)$$

satisfaite par f entraînent l'égalité

$$\forall n \geq 0\,,\ \mathbb{E}\big[f(\Delta_{n+1}) | \Delta_0, \dots, \Delta_n\big] = f(\Delta_n) + \mathbf{1}_{\Delta_n = 0}.$$

La suite de variables aléatoires $(f(\Delta_n))_{n\geq 0}$ est donc une sous-martingale.
Les valeurs de f sont bornées : on a par exemple pour tout $n \geq 0$, $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{1-\rho^{-1}}$. La sous-martingale est donc bornée et presque sûrement convergente. $\square$
Démontrons maintenant la proposition 1.

Démonstration. La suite $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'entiers naturels dont, presque sûrement, deux termes successifs quelconques sont distincts. Comme f est injective, les termes successifs de la suite $(f(\Delta_n))_{n\geq 1}$ sont également distincts. D'après le lemme 1, cette suite, qui prend ses valeurs dans $f(\mathbb{N})$, est presque sûrement convergente. Elle converge donc nécessairement vers un point d'accumulation de $f(\mathbb{N})$. Or il n'y en a qu'un : c'est $\lim_{n\to\infty} f(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^{-\frac{k(k+1)}{2}}$. Ceci démontre la convergence presque sûre $\lim_{n\to\infty} \Delta_n = +\infty$ que nous voulions prouver. □

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.

Démonstration. Pour tous $N, d \geq 0$, la probabilité que la suite $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ soit croissante à partir du rang N sachant que $\Delta_N = d$ vaut

$$\mathbb{P}[\forall n \geq N, \Delta_{n+1} = \Delta_n + 1 | \Delta_N = d] = \prod_{k=d}^{+\infty} \frac{1}{1+\rho^{-k}},$$

où le membre de droite est un produit absolument convergent. Cette probabilité ne dépend donc pas de N et nous la noterons $Q(d)$. De plus, $Q(d)$ tend en croissant vers 1 lorsque d tend vers $+\infty$.

La probabilité que la suite $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ soit croissante à partir d'un certain rang peut donc être estimée comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\exists N \geq 0, \forall n \geq N, \Delta_{n+1} = \Delta_n + 1] &\geq \sup_{N\geq 0} \mathbb{P}[\forall n \geq N, \Delta_{n+1} = \Delta_n + 1] \\ &= \sup_{N\geq 0} \sum_{d=0}^{+\infty} Q(d) \mathbb{P}[\Delta_N = d]. \end{aligned}$$

D'après la proposition 1, Δ_N tend presque sûrement vers $+\infty$ lorsque N tend vers $+\infty$. En particulier, pour tout $d \geq 0$, $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}[\Delta_N = d] = 0$. Il s'ensuit que pour tout $D \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\exists N \geq 0, \forall n \geq N, \Delta_{n+1} = \Delta_n + 1] &\geq \sup_{N\geq 0} \sum_{d=D}^{+\infty} Q(d) \mathbb{P}[\Delta_N = d] \\ &\geq Q(D). \end{aligned}$$

En faisant tendre D vers $+\infty$, on trouve

$$\mathbb{P}[\exists N \geq 0, \forall n \geq N, \Delta_{n+1} = \Delta_n + 1] \geq \lim_{D\to+\infty} Q(D) = 1.$$

C'est le résultat cherché. □

Suggestions pour le développement

► *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

— *Développements mathématiques*

- La plupart des preuves présentées dans le texte sont lacunaires. Vous pouvez choisir quelques-uns des résultats et en détailler la preuve.
- Vous pouvez discuter le rôle des paramètres α_0 et β_0, qui ont toujours été pris égaux dans le texte. Dans le cas sans renforcement, que reste-t-il par exemple du théorème 1 si $\alpha_0 > \beta_0$? Dans le cas du renforcement linéaire, que devient la loi de U lorsque $\alpha_0 = 2$ et $\beta_0 = 1$?
- Connaissez-vous un modèle qui a un comportement analogue à celui du processus X dans le cas du renforcement linéaire ?

— *Modélisation*

- Le modèle de renforcement géométrique vous semble-t-il réaliste ? Comment concilier ses défauts et ce qu'on observe dans la réalité, à savoir une suite X stationnaire ?
- Voyez-vous des généralisations possibles des modèles présentés ? Des applications de ces modèles ?

— *Étude numérique*

Vous pouvez simuler chacun des trois modèles. Dans le second, on cherchera à mettre en évidence l'uniformité de la loi de U. Dans le troisième, on pourra essayer d'estimer le temps à partir duquel la suite est stationnaire.