Prix d'une option d'achat : formule de Black et Scholes

Christophe Leuridan

Université de Grenoble - Préparation à l'agrégation

1 Le modèle binomial à temps discret

On suppose que le prix d'une action varie de la façon suivante : à chaque instant, $S_n = S_{n-1}(1+r+\sigma)$ avec probabilité 1/2 et $S_n = S_{n-1}(1+r-\sigma)$ avec probabilité 1/2. Le paramètre r est le taux d'actualisation. Le paramètre σ, appelé volatilité, mesure le « risque » de l'action. On suppose que $0 < \sigma < 1+r$, de sorte que S_n reste toujours strictement positif.

On modélise donc le cours à partir d'un instant 0 par la relation de récurrence $S_n = S_{n-1}(1+r+\sigma\epsilon_n)$, où $(\epsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi $\frac{1}{2}(\delta_{-1}+\delta_1)$. On supposera $S_0 = s$ constant et on notera $\mathcal{F}_n = \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$.

Une option d'achat sur une action à l'échéance N et au prix d'exercice K est le droit de pouvoir acheter à la date N l'action au prix unitaire K, même si le cours unitaire à la date N est supérieur à K. A l'échéance N, ce droit procure un gain de $S_N - K$ si $S_N > K$ par action (on achète l'action au prix K alors qu'elle vaut S_N) et 0 sinon (dans ce cas, il n'est pas intéressant d'utiliser l'option d'achat). La valeur à l'échéance de l'option est donc $(S_N - K)_+$, c'est-à-dire $S_N - K$ si $S_N > K$ et 0 sinon.

Si $n \in [0 \ldots N]$ désigne un instant avant l'échéance, $\mathbf{E}[(S_N - K)_+|\mathcal{F}_n]$ est la moyenne des valeurs prévisibles de l'option à l'échéance, compte tenu de l'évolution déjà passée du cours de l'action. Compte tenu du taux d'actualisation, la valeur de l'option d'achat à l'instant $n \in [0 \ldots N]$ est

$$C_n = \mathbf{E}[(S_N - K)_+|\mathcal{F}_n]/(1+r)^{N-n}.$$

Un calcul simple montre que

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^N}\sum_{k=0}^{N}\frac{C_N^k}{2^N}[s(1+r+\sigma)^k(1+r-\sigma)^{N-k} - K]_+.$$

Une autre façon d'écrire C_0 est de poser $p = \frac{1+r+\sigma}{2(1+r)}$, $q = \frac{1+r-\sigma}{2(1+r)}$, $\alpha = \ln(1+r+\sigma)$, $\beta = \ln(1+r-\sigma)$ et de prendre des variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_N$ de loi $pd\delta_\alpha + q\delta_\beta$. En notant $V_N = X_1 + \cdots + X_N$, on a alors

$$C_0 = \mathbf{E}[(s - Ke^{-V_N})_+]$$

Suggestions de développement

1. Montrer que la suite $((S_n/s)^{1/n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge presque sûrement.
2. Que peut-on dire de la suite $((1+r)^{-n}S_n)_{n\in\mathbf{N}}$?
3. Que peut-on dire de la suite $((1+r)^{N-n}C_n)_{0\leq n\leq N}$?

4. Montrer que $(S_n - K)_+ \leq C_n \leq S_n$ pour tout $n \in [0 \dots N]$. Indication : utiliser l'inégalité de Jensen.
5. Calculer C_{N-1}.
6. Justifier le calcul de C_0. On pourra exprimer $U_N = \prod_{k=1}^N (1 + r + \sigma\epsilon_k)$ en fonction du nombre de ϵ_k valant 1.

2 Passage au temps continu

L'objet de cette partie est d'étudier le comportement de C_0 lorsque $r = R/N$, $\sigma = \Sigma/\sqrt{N}$ et $N \to +\infty$. Intuitivement, ce passage à la limite correspond à la subdivision d'un intervalle de temps $[0, T]$ en N intervalles de longueur T/N.

En remarquant que $2 \ln U_N = N(\alpha+\beta) + (\alpha-\beta) \sum_{k=1}^N \epsilon_k$, on vérifie grâce au théorème limite central et au lemme de Slutsky que la loi de $\ln U_N$ tend vers la loi $\mathcal{N}(R - \frac{\Sigma^2}{2}, \Sigma^2)$. Donc la loi de U_n tend vers une loi log-normale. On en déduit que C_0 tend vers

$$e^{-R} \int_{\mathbf{R}} \left(s e^{R - \frac{\Sigma^2}{2} + \Sigma x} - K\right)_+ \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Suggestions de développement

1. Justifier le choix de la normalisation $r = R/N$, $\sigma = \Sigma/\sqrt{N}$.
2. Justifier les convergences. On pourra remarquer que
$$C_0 = \mathbf{E}[(sU_N - K)_+]/(1+r)^N = s - \mathbf{E}[\min(sU_N, K)]/(1+r)^N.$$
3. De la même façon, montrer que $\ln V_N$ converge en loi. En déduire que C_0 tend vers
$$\int_{\mathbf{R}} \left(s - K e^{-R - \frac{\Sigma^2}{2} + \Sigma y}\right)_+ \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy.$$
4. Vérifier par un changement de variables simple que les deux expressions trouvées sont les mêmes.
5. Quelle serait la loi de $U_N = S_N/s$ si on supposait que les variables aléatoires $\ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(r, \sigma^2)$?

3 Formule de Black et Scholes

Soit Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. A l'aide de la formule

$$\int_{\mathbf{R}} (a - e^{by})_+ \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy = a\Phi(\frac{\ln a}{b}) - e^{b^2/2}\Phi(\frac{\ln a}{b} - b)$$

on trouve que la valeur limite de C_0 est $s\Phi(d_1) - Ke^{-R}\Phi(d_2)$ où $d_1 = \frac{1}{\Sigma}\big(\ln \frac{s}{K} + R + \frac{\Sigma^2}{2}\big)$ et $d_2 = \frac{1}{\Sigma}\big(\ln \frac{s}{K} + R - \frac{\Sigma^2}{2}\big)$.

Suggestions de développement

1. Justifier ces calculs.
2. Que deviennent les formules pour des options de vente (droit de vendre l'action à l'instant N et au prix unitaire K même si son cours unitaire est inférieur à K) ?
3. On prend $s = 1$, $N = 100$, $R = 0,01$ et $\Sigma = 0,2$. Simuler un grand nombre de trajectoires de $(S_n)_{0 \leq n \leq N}$. Représenter sur un même graphique la fonction de répartition empirique de S_N avec la fonction de répartition de la loi limite.