Modélisation probabiliste pour l'optimisation des stratégies de maintenance de la voie ferrée *

Christophe Leuridan

Université de Grenoble - Préparation à l'agrégation

La maintenance d'une voie ferrée vise à corriger les déformations liées au profil de la ligne, à la géologie, au climat, à l'âge et au trafic qu'elle supporte. On distingue quatre types de défauts de géométrie la voie : nivellement longitudinal, nivellement transversal, écartement, dressage. Ces déformations sont mesurés lors d'inspections effectuées à intervalles de temps réguliers. Pour des défauts légers, l'intervention la plus courante est le bourrage (correction de la géométrie de la voie par vibration et compactage mécanique du ballast). Des défauts trop importants nécessitent le remplacement du ballast, une intervention beaucoup plus coûteuse. On cherche donc à choisir l'intervalle entre les inspections et le seuil à partir duquel un bourrage est planifié de façon optimale pour réduire les coûts de maintenance.

1 Modélisation du système

On suppose que le vieillissement de la voie à un instant t est mesuré par une variable aléatoire positive X_t. En l'absence d'intervention, le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est croissant et évolue comme un processus Gamma de paramètres α et β (voir ci-dessous). Lors des interventions (bourrage ou remplacement du ballast), le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ effectue un saut négatif correspondant au gain obtenu (amélioration de la géométrie de la voie).

Notons $(X'_t)_{t\geq 0}$ le processus mesurant la dégradation de la voie sans tenir compte des interventions : le processus $(X'_t - X_t)_{t\geq 0}$ est donc constant entre deux interventions et effectue un saut positif lors des interventions. On suppose que le processus $(X'_t)_{t\geq 0}$ est indépendant de X_0 et est un processus Gamma de paramètres α et β, ce qui signifie que $X'_0 = 0$ et que pour tout $t, h \geq 0$, $X'_{t+h} - X'_t$ est indépendant de $(X'_s)_{0\leq s\leq t}$ et suit la loi Gamma de paramètres αh et β de densité donnée par

$$f_{X'_{t+h}-X'_t}(x) = \mathbf{I}_{[x>0]}\frac{\beta^{\alpha h}}{\Gamma(\alpha h)}x^{\alpha h-1}e^{-\beta x}.$$

On vérifie facilement que $\frac{X'_t}{t} \to \frac{\alpha}{\beta}$ presque sûrement quand $t \to +\infty$.

Les inspections de la voie sont effectuées à intervalles réguliers de durée Δ. On observe donc les variables aléatoires $Y_n = X_{n\Delta}$. Il y a trois possibilités, suivant la position de Y_n par rapport à deux seuils $S > s > 0$.

- Si $Y_n < s$, il n'y a pas d'intervention pendant l'intervalle de temps $[n\Delta, (n+1)\Delta]$. Donc $Y_{n+1} - Y_n = X'_{(n+1)\Delta} - X'_{n\Delta}$.

*D'après l'article de C. Meier-Hirmer, F. Sourget, M. Roussignol *Optimising the strategy of track maintenance*, Advances in Safety and Reliability (2005), 1385-1391.

- Si $Y_n \geq s$, une intervention est planifiée avec un délai $\delta < \Delta$, donc effectuée à l'instant $n\Delta + \delta$. L'intervention est un bourrage si $Y_n < S$ et un remplacement du ballast si $Y_n \geq S$. Donc $Y_{n+1} - Y_n = X'_{(n+1)\Delta} - X'_{n\Delta} - G$ où G est le gain apporté par l'intervention.

Suggestions de développement

1. Si $t, h \geq 0$, quelle est la loi de X'_t, de $X'_{t+h} - X'_t$ et de X'_{t+h} ? Quelles propriétés des lois Γ rendent compatibles entre elles les hypothèses faites sur le processus X' ?
2. Justifier le fait que $\frac{X'_t}{t} \to \frac{\alpha}{\beta}$ quand $t \to +\infty$.
3. Si $(Z_1, \ldots, Z_n)$ est un échantillon de la loi Gamma de paramètres $\alpha\Delta$ et β, quelle est la densité de $(Z_1, \ldots, Z_n)$? En déduire que l'estimateur du maximum de vraisemblance de (α, β) est donné par $\frac{\hat{\alpha}\Delta}{\hat{\beta}} = \frac{Z_1+\ldots+Z_n}{n}$ et $\psi(\hat{\alpha}\Delta) - \ln\hat{\beta} = \frac{\ln Z_1+\ldots+\ln Z_n}{n}$, en notant pour tout $s > 0$,
$$\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \lim_{n\to+\infty} \ln n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s+k}.$$
Que se passe-t-il quand $n \to +\infty$? Indication : on pourra montrer que l'application $\psi - \ln$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

2 Loi du gain lors d'une intervention

Notons G_k le gain apporté par la k-ième intervention, effectuée à l'instant aléatoire $T_k = N_k\Delta + \delta$. On suppose que la loi conditionnelle de G_k par rapport à $(X_t)_{0\leq t<T_k}$ et à $G_1, \ldots, G_{k-1}$ ne dépend que de X_{T_k-} (état de la voie juste avant l'intervention), que cette loi conditionnelle est gaussienne de variance fixe σ^2 et que son espérance est une fonction affine de X_{T_k-}. Cela revient à écrire
$$G_k = \mu + \eta X_{T_k-} + \sigma U_k,$$
où $(U_n)_{n\geq1}$ est suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$, indépendante du processus $(X_t)_{t\geq0}$ et μ, η, σ sont des paramètres à déterminer.

On peut estimer les paramètres μ, η, σ au moyen d'une régression linéaire. On ne connaît pas les valeurs X_{T_k-} ni les gains réels $G_k = X_{T_k-} - X_{T_k}$ mais seulement les valeurs $X_{N_k\Delta}$ et les gains mesurés $G'_k = X_{N_k\Delta} - X_{(N_k+1)\Delta}$. Les gains mesurés sont inférieurs aux gains réels car il faut tenir compte du vieillissement de la voie pendant l'intervalle de temps $[N_k\Delta, N_k\Delta + \Delta]$. Plus précisément,
$$G_k = G'_k + X'_{(N_k+1)\Delta} - X'_{N_k\Delta}.$$
$$X_{T_k-} = X_{N_k\Delta} + X'_{N_k\Delta+\delta} - X'_{N_k\Delta}.$$
Comme le processus X' croît à la vitesse moyenne de $\frac{\alpha}{\beta}$, on écrit
$$G'_k + \frac{\alpha\Delta}{\beta} = \mu + \eta(X_{N_k\Delta} + \frac{\alpha\delta}{\beta}) + V_k,$$
avec
$$V_k = U_k - (X'_{(N_k+1)\Delta} - X'_{N_k\Delta} - \frac{\alpha\Delta}{\beta}) + \eta(X_{N_k\Delta+\delta} - X_{N_k\Delta} - \frac{\alpha\delta}{\beta}).$$
Les variables V_k sont indépendantes et centrées, on estime donc μ et η à l'aide de l'estimateur des moindres carrés en remplaçant G_k par $G'_k + X'_{(N_k+1)\Delta}$ et $X_{N_k\Delta} + \frac{\alpha\delta}{\beta}$.

Suggestions de développement

1. L'hypothèse que les variables aléatoires U_k sont gaussiennes est-elle réaliste ? Comment tester cette hypothèse ?
2. Préciser ce que donne l'estimation des moindres carrés. Quelle est la valeur estimée de la variance de V_k ? Quelle est la loi de V_k ? Quelle relation y-a-t-il entre la variance de V_k et celle de U_k ?
3. Une estimation sur la ligne à grande vitesse (LGV) Paris - Lyon pour la période 2001-2004 fournit les valeurs $\alpha = 0,0521$ et $\beta = 24,53$, $\mu = -0,55$, $\eta = 0,98$ et $\sigma' = \mathrm{Var}(V) = 0,26$. Le seuil S est fixé à $1,3$; le seuil s et l'intervalle Δ entre les inspections sont à choisir de façon optimale. Les variables mesurant l'état de la voie $X_t, S, s, \ldots$ sont mesurées dans une unité arbitraire et les durées sont mesurées en jours. Quelle est le vieillissement moyen de la voie par jour ? Au vu de la valeur de μ, dans quel intervalle faut-il choisir s ? Que traduit le fait que η soit presque égal à 1 ? Peut-on considérer que les variables V_k sont approximativement gaussiennes ?

3 Coût asymptotique

On peut montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $Y_n = X_{n\Delta}$ est une chaîne de Markov récurrente (au sens où tout intervalle de $\mathbf{R}_+$ est visité une infinité de fois) et possède une unique probabilité invariante π.

Le coût journalier moyen de la maintenance pendant l'intervalle de temps $[0, n\Delta[$ est

$$\frac{1}{n\Delta}\sum_{k=0}^{n-1}(C_i + C_b\mathbf{I}_{[s\le Y_k<S]} + C_r\mathbf{I}_{[S\le Y_k]})$$

où C_i, C_b, C_r sont les coûts respectifs d'une inspection, d'un bourrage et d'un remplacement de ballast. Quand $n \to +\infty$, ce coût journalier moyen tend vers

$$C_a = \frac{1}{\Delta}(C_i + C_b\pi[s,S[+ C_r\pi[S,+\infty[).$$

Il suffit donc de connaître la probabilité invariante pour déterminer le coût asymptotique.

Comme on ne sait pas calculer de façon exacte la probabilité invariante, on approche la chaîne par une chaîne de Markov à espace d'états fini en découpant les intervalles $[0, s[$, $[s, S[$ et $[S, +\infty[$.

Le calcul pour la LGV Paris - Lyon avec les valeurs $C_i = 25\epsilon/\mathrm{km}$, $C_b = 5000\epsilon/\mathrm{km}$, $C_r = 580000\epsilon/\mathrm{km}$, $s = 0,90$ et $\Delta = 45\mathrm{j}$ (stratégie actuelle) fournit une valeur $C_a = 43\epsilon/(\mathrm{km}\times\mathrm{j})$. En prenant $s = 1,00$ et $\Delta = 20\mathrm{j}$, on obtiendrait $C_a = 30\epsilon/(\mathrm{km}\times\mathrm{j})$, ce qui est proche de la stratégie optimale.

Suggestions de développement

1. Justifier le fait que $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit une chaîne de Markov. Quelle est la loi de Y_{n+1} sachant que $Y_n = x$? Calculer $\mathbf{E}[Y_{n+1}|Y_n]$.
2. Justifier de façon heuristique les affirmations à l'aide des théorèmes connus sur les chaînes de Markov à espace d'états dénombrable.
3. Comment calculer la probabilité invariante pour la chaîne de Markov à espace d'états finis approchant la chaîne $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

4 Un modèle simplifié

Dans cette partie, on étudie un modèle simplifié où $\alpha = 0,05\text{j}^{-1}$, $\beta = 24$, $\Delta = \delta = 20\text{j}$ et $s = 1,00$. On suppose que la variable aléatoire mesurant l'état de la voie après une intervention est à valeurs dans $[0, s[$ et indépendante de tous les états antérieurs. On note m son espérance.

Comme $\alpha\Delta = 1$, les accroissements $X'_{(n+1)\Delta} - X'_{(n+1)\Delta}$ sont indépendants et de loi exponentielle $\mathcal{E}(\beta)$. Mais $Y_n = Y_0 + X'_{n\Delta}$ tant que $n \leq N_1$ où $N_1 = \inf\{n \in \mathbf{N} : Y_n \geq s\}$ est le numéro de la première inspection suivie d'une intervention.

Sachant que $Y_0 = y < s$, les variables aléatoires N_1 et $Y_{N_1} - s$ sont donc indépendantes et de lois respectives $\mathcal{P}(\beta(s-y))$ et $\mathcal{E}(\beta)$. En particulier, $\mathbf{E}[N_1 | Y_0 = s] = \beta(s-y)$ et $P[Y_{N_1} > s | Y_0 = y] = e^{-\beta(S-s)}$.

Sachant que $Y_0 = x \geq s$, la variable aléatoire Y_1 est $< s$ et d'espérance m ; le premier instant de retour R de la chaîne $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $[s, +\infty[$ a pour espérance $1 + \beta(s-m)$, et le premier instant de retour $[S, +\infty[$ a pour espérance $e^{\beta(S-s)}(1 + \beta(s-m))$. On en déduit que

$$\pi[s, +\infty[= (1 + \beta(s-m))^{-1} \quad \text{et} \quad \pi[S, +\infty[) = (1 + \beta(s-m))^{-1} e^{-\beta(S-s)},$$

ce qui permet de calculer C_a.

Suggestions de développement

1. Justifier les calculs ci-dessus.
2. Calculer C_a en prenant $m = 0,50$.
3. Simuler la chaîne de Markov lorsque les variables aléatoires donnant l'état de la voie après une intervention ont pour loi Béta de paramètres 2 et 2, de densité $x \mapsto 6x(1-x)\mathbf{I}_{[0<x<1]}$. On pourra montrer que cette loi est celle de la valeur médiane de trois variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.
4. Calculer la probabilité invariante π en remarquant que pour tout $x \geq s$,

$$\pi[0, y] = \frac{1}{\mathbf{E}_x[R]} \mathbf{E}_x[\sum_{k=1}^{R} \mathbf{I}_{[Y_k \leq y]}].$$