File d'attente à un téléski

Christophe Leuridan

Université de Grenoble - Préparation à l'agregation

1 Le modèle

Un téléski non débrayable comporte des perches disposées à intervalles réguliers. A chaque instant $0, 1, 2, \ldots$, une perche passe au bas d'un téléski et un skieur l'emprunte si la file d'attente au pied du téléski n'est pas vide.

Soit X_n le nombre de skieurs se trouvant dans la file d'attente juste avant l'instant n et D_{n+1} le nombre de skieurs arrivant au pied du téléski entre les instants n et $n+1$. On suppose que les variables aléatoires $X_0, D_1, D_2, \ldots$ sont indépendantes et que les variables aléatoires $D_1, D_2, \ldots$ sont de même loi $\mu = \sum_{n \in \mathbf{N}} p_n \delta_n$ et d'espérance $m < +\infty$.

La relation de récurrence $X_{n+1} = (X_n - 1)_+ + D_{n+1}$ montre que $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov. Si $p_0 > 0$ et $p_2 > 0$, la chaîne est irréductible et apériodique.

Suggestions de développement

1. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov et donner la matrice de transition.
2. Justifier l'irréductibilité et l'apériodicité. Quelles en sont les conséquences ?

2 Comportement asymptotique de la chaîne

La loi forte des grands nombres permet de déterminer le comportement asymptotique suivant les valeurs de m. Il suffit de remarquer que $X_n = X_0 + S_n + A_n$ avec

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (D_k - 1) \quad \text{et} \quad A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{I}_{[X_k = 0]}.$$

Quand $n \to +\infty$, $S_n/n \to m-1$ presque sûrement. On en déduit facilement les résultats suivants en utilisant les minorations $X_n \geq X_0 + S_n$ et $X_n \geq 0$.

Si $m > 1$, alors $X_n \to +\infty$ presque sûrement : la chaîne est transiente. De plus, la suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est stationnaire et $X_n/n \to m - 1$ presque sûrement.

Si $m < 1$, alors $A_n \to +\infty$ presque sûrement : la chaîne est récurrente. On peut même montrer que $\liminf A_n/n = 1 - m$ presque sûrement.

Le cas où $m = 1$ est plus délicat, mais on peut montrer que $\liminf S_n = -\infty$ presque sûrement. Par croissance de la suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ on en déduit que $A_n \to +\infty$ presque sûrement : la chaîne est récurrente.

Suggestions de développement

1. Que répresente la variable aléatoire A_n ?
2. Justifier les affirmations lorsque $m \neq 1$ et expliquer en quoi ce résultat est intuitif.
3. Simuler la chaîne pour différentes valeurs de m lorsque μ est une loi de Poisson (pourquoi ce choix ?). Comment estimer m ?
4. Peut-on préciser le comportement asymptotique de A_n ?

3 Loi du temps de retour en 0

Soit $R_0 = \inf\{n \in \mathbf{N}^* : X_n = 0\}$ le premier instant où la file d'attente se vide. On cherche la loi de R_0 connaissant l'état initial de la file, c'est-à-dire sous les probabilités $P^{x_0} = P[\cdot|X_0 = x_0]$. On remarque que $R_0 = \inf\{n \in \mathbf{N}^* : S_n = -\max(1, X_0)\}$

On note ϕ la fonction génératrice de D_1 : pour tout $z \in [0,1]$, $\phi(z) = \mathbf{E}[z^{D_1}]$. L'application ϕ est convexe sur $[0,1]$ et vérifie $\phi(0) = p_0 > 0$, $\phi(1) = 1$, $\phi'(1) = m$. On vérifie que la suite $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $M_n = z^{S_n+n}/\phi(z)^n$ est une martingale positive. Cette martingale converge presque sûrement vers une variable aléatoire M_∞. De plus, $M_\infty = 0$ presque sûrement, pourvu que D ne soit pas constante égale à m.

Une façon de le le prouver consiste à montrer que $M_n^{1/n} \to z^m/\phi(z)$ à l'aide de la loi forte des grands nombres et à remarquer que pour $z > 0$, l'inégalité de Jensen

$$\phi(z) = \mathbf{E}[\exp(D \ln z)] \geq \exp(\mathbf{E}[D \ln z]) = z^m$$

est stricte. En effet, cette inégalité s'obtient en passant aux espérances dans l'inégalité

$$\exp(D \ln z) \geq \exp(m \ln z) + \exp(m \ln z)(D - m) \ln z,$$

qui est stricte avec probabilité strictement positive.

Une autre façon consiste à remarquer que $z^{D_n}/\phi(z) = M_n/M_{n-1} \to 1$ sur l'événement $[M_n \to M_\infty > 0]$. Mais les variables aléatoires D_n sont indépendantes et de même loi $\mu = \sum_{d\in\mathbf{N}} p_d\delta_d$. Par conséquent, si $p_d > 0$ pour deux valeurs différentes de d, la suite $(D_n)_{n\geq1}$ prend presque sûrement chacune de ces valeurs une infinité de fois, ce qui contredit la convergence de la suite $(Z^{D_n})_{n\geq1}$.

Si $m \leq 1$, alors $\phi(z) \geq z$ pour tout $z \in [0,1]$ d'où $0 \leq M_n \leq z^{-\max(1,x_0)}$ sur l'événement $[n \leq R_0]$, on peut appliquer le théorème d'arrêt au temps R_0, ce qui donne

$$(*)\ \forall z \in [0,1[,\ \mathbf{E}^{x_0}[(z/\phi(z))^{R_0}\mathbf{I}_{[R_0<+\infty]}] = z^{\max(1,x_0)}.$$

En faisant tendre z vers 1, on obtient $P^{x_0}[R_0 < +\infty] = 1$: la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est récurrente. De plus, la formule $(*)$ montre que la fonction génératrice de R_0 sous P^{x_0} est g^{x_0}, où g est la bijection réciproque de la bijection $z \mapsto z/\phi(z)$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

Si $m > 1$, il existe une unique $q \in]0,1[$ tel que $\phi(q) = q$. L'inégalité $\phi(z) \geq z$ et l'égalité $(*)$ ne sont valables que pour $z \in [0,q]$. En particulier,

$$P^{x_0}[R_0 < +\infty] = q^{\max(1,x_0)} < 1.$$

La chaîne $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc transiente.

Suggestions de développement

1. Justifier le fait que $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une martingale et la convergence presque sûre vers 0.
2. Justifier l'utilisation du théorème d'arrêt.
3. Pourquoi la fonction $z \to z/\phi(z)$ réalise une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1]$?
4. Pourquoi la loi de R_0 est-elle la même sous P^0 et sous P^1 ? Interpréter le fait que la fonction génératrice de R_0 sous P^{x_0} est g^{x_0} lorsque $x_0 \geq 2$.
5. A l'aide de la fonction génératrice de R_0, montrer que $\mathbf{E}^0[R_0] = \frac{1}{1-m}$ si $m < 1$ et $\mathbf{E}[R_0] = +\infty$ si $m = 1$. Qu'en déduit-on pour la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$?
6. La formule d'inversion de Lagrange ou des arguments probabilistes permettent de montrer que pour tout $x_0, n \in \mathbf{N}^*$, $P^{x_0}[R_0 = n] = \frac{x_0}{n} P[S_n = -x_0]$. Expliciter la loi de R_0 lorsque μ est une loi de Poisson.

4 Etude du régime stationnaire lorsque $m < 1$

Si $m < 1$, la loi de X_n converge vers la loi stationnaire de la chaîne π. On détermine cette loi en remarquant que sous la probabilité $P^\pi = \sum_{n\in\mathbf{N}} \pi\{x\} P^x$, les variables aléatoires X_0 et $X_1 = (X_0 - 1)_+ + D_1$ suivent la loi π, ce qui donne la relation de récurrence

$$\pi\{n\} = p_n \pi\{0\} + \sum_{k=1}^{n+1} p_{n+1-k} \pi\{k\}$$

pour $n \geq 1$. On peut aussi remarquer que la fonction génératrice ψ de la loi π vérifie

$$\psi(z) = \Big(\frac{\psi(z) - \pi\{0\}}{z} + \pi\{0\}\Big)\phi(z)$$

d'où

$$\psi(z) = \pi\{0\}\phi(z)\frac{1-z}{\phi(z) - z}.$$

Il reste à calculer $\pi\{0\}$. Il y a plusieurs façons de procéder :
- utiliser l'égalité $\pi\{0\} = 1/\mathbf{E}^0[R_0] = 1 - m$;
- faire tendre z vers 1 dans l'expression de $\psi(z)$;
- écrire que X_0 et $X_1 = X_0 - 1 + \mathbf{I}_{[X_0=0]} + D_1$ ont même espérance sous P^π.

Cette dernière méthode n'est valable que si $\mathbf{E}^\pi[X_0] < +\infty$.

Suggestions de développement

1. A l'aide d'un développement limité de $\psi(z)$ au voisinage de 1, montrer que si D_1 est de carré intégrable, alors $\mathbf{E}^\pi[X_0] = \frac{1}{2}\big(m + \frac{\sigma^2}{1-m}\big)$, où σ^2 est la variance de D_1.
2. Expliciter les calculs lorsque μ est une loi de Poisson. Représenter sur un même histogramme la loi stationnaire avec la loi empirique de $(X_0, \dots, X_{N-1})$ sous P^0. Quel résultat met-on en évidence ?