Différents modes de transmission

1 Le modèle

Un émetteur envoie des morceaux de message à intervalles de temps régulier par l'intermédiaire d'un satellite. Des erreurs de transmission peuvent altérer le contenu d'un message et nécessitent son renvoi. On s'intéresse au rendement de différents protocoles, c'est-à-dire à la proportion asymptotique de messages bien transmis.

On discrétise le temps et on suppose que la probabilité d'erreur varie au cours du temps en fonction des conditions atmosphériques. On modélise l'évolution de la probabilité d'erreur par une chaîne de Markov $(\epsilon_t)_{t\in\mathbf{N}^*}$ à valeurs dans une partie finie $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ de $[0, 1]$. On suppose que les probabilités de transition $a_{i,j} = p(\alpha_i, \alpha_j)$ sont toutes strictement positives.

On note Y_t l'indicatrice de l'événement « la transmission à l'instant t est bonne » et on suppose que connaissant les probabilités $(\epsilon_t)_{t\in\mathbf{N}^*}$, les variables aléatoires $(Y_t)_{t\in\mathbf{N}^*}$, sont indépendantes de lois respectives $\epsilon_t\delta_0 + (1-\epsilon_t)\delta_1$. Par exemple,

$$P[Y_1 = 0, Y_2 = 1, Y_3 = 0|(\epsilon_t)_{t\in\mathbf{N}^*}] = P[Y_1 = 0, Y_2 = 1, Y_3 = 0|\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3] = \epsilon_1(1-\epsilon_2)\epsilon_3.$$

2 Protocole de répétition sélective

Dans ce protocole, on renvoie les messages pour lesquels on a détecté une erreur.

Pour simplifier l'étude, on suppose que les messages ont une longueur fixe M : pour envoyer un message, il faut donc envoyer M morceaux. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la variable aléatoire

$$Z_n = \prod_{m=1}^{M} Y_{(n-1)M+m}$$

indique si le n-ième message a été bien transmis L'espérance conditionnelle de Z_n connaissant les probabilités $(\epsilon_t)_{t\in\mathbf{N}^*}$ est

$$\mathbf{E}[Z_n|(\epsilon_t)_{t\in\mathbf{N}^*}] = \prod_{m=1}^{M}(1-\epsilon_{(n-1)M+m}) = f(X_n),$$

avec $X_n = (\epsilon_{(n-1)M+1}, \epsilon_{(n-1)M+2} \dots, \epsilon_{nM})$ et $f(e_1, \dots, e_M) = (1-e_1)\cdots(1-e_M)$ pour tout $(e_1, \dots, e_M) \in [0, 1]^M$.

La proportion de messages bien transmis parmi les n premiers messages envoyés est

$$D_1(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

Conditionnellement aux probabilités $(\epsilon_t)_{t\in\mathbf{N}^*}$, l'espérance et la variance de $D_1(n)$ sont

$$\mathbf{E}[D_1(n)|(\epsilon_t)_{t\in\mathbf{N}^*}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i),$$

$$\mathrm{Var}(D_1(n)|(\epsilon_t)_{t\in\mathbf{N}^*}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n f(X_i)\big(1-f(X_i)\big).$$

Par conséquent,

$$\mathbf{E}\Big[\Big(D_1(n) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i)\Big)^2\Big] = \mathbf{E}[\mathrm{Var}(D_1(n)|(\epsilon_t)_{t\in\mathbf{N}^*})] \leq \frac{1}{4n},$$

ce qui montre que

$$D_1(n) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i) \to 0 \quad \text{dans} \quad L^2.$$

Il y a aussi convergence presque sûre, mais c'est plus difficile à montrer.

Par ailleurs, on vérifie facilement que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une chaîne de Markov sur F^M, admettant comme probabilité invariante la mesure π définie par

$$\pi\{(e_1,\ldots,e_M)\} = \nu(e_1)p(e_1,e_2)\cdots p(e_{M-1},e_M),$$

où ν est la probabilité invariante de la chaîne $(\epsilon_t)_{t\in\mathbf{N}}$. La valeur moyenne de f pour π est

$$\begin{aligned}\int_{F^M} f d\pi &= \sum_{e_1,\ldots,e_n\in F} \nu(e_1)p(e_1,e_2)\cdots p(e_{M-1},e_M)(1-e_1)\cdots(1-e_M)\\ &= \sum_{1\leq i_1,\ldots i_M\leq r} \nu(\alpha_{i_1})(1-\alpha_{i_1})a_{i_1,i_2}\cdots a_{i_{M-1},i_M}(1-\alpha_{i_M})\end{aligned}$$

On en déduit la convergence presque sûre

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i) \to (\nu(\alpha_1)\ldots\nu(\alpha_r))(BA)^M \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \sum_{1\leq i,j\leq r} \nu(\alpha_i)[(BA)^M]_{(i,j)},$$

en notant $A = (a_{(i,j)})_{1\leq i,j\leq r}$ et B est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $1-\alpha_1,\ldots,1-\alpha_r$. La proportion $D_1(n)$ de messages bien transmis tend vers la même limite.

1. Justifier les calculs d'espérance et de variance conditionnelles de la première partie.
2. Justifier le fait que (X_n) est une chaîne de Markov, préciser ses probaabilités de transition, et vérifier que π est une probabilité invariante.
3. Justifier les convergences.
4. Simuler le protocole sur un exemple simple : prendre par exemple $\alpha_1 = 0$ (atmosphère calme), $\alpha_2 = 0.1$ (atmosphère orageuse), $a_{1,1} = 0.99$ et $a_{2,2} = 0.9$.
5. Préciser les résultats lorsque F possède un seul élément α (les probabilités ϵ_n sont alors constantes égales à α).

3 Protocole de rejet éventuel

On suppose que chaque erreur de transmission est détectée avec un délai N.

Le pricnipe de ce protocole est le suivant : si l'on détecte à l'insant $t+N$ une erreur produite à un instant t, on renvoie toutes les portions de message envoyées entre les instants t et $t+N$ (non compris), car on suspecte d'autres erreurs dans l'intervalle.

Plus précisément, si $T_1 \geq 1$ est l'instant de la première erreur, on renvoie à partir de l'instant $T_1 + N$ les portions de message envoyées entre les instants T_1 et $T_1 + N - 1$. Si $T_2 \geq T_1 + N$ est l'instant de la deuxième erreur (à partir du premier renvoi), on renvoie à partir de l'instant $T_2 + N$ toutes les portions de message envoyées entre les instants T_2 et $T_2 + N - 1$.

Les instants T_n vérifient donc une relation de récurrence $T_{n+1} = T_n + N + S_n$, où S_n est le nombre de transmissions utiles (sans erreur) entre les instants $T_n + N$ et T_{n+1}. Le rendement du protocole avant l'instant $T_n + N$ est

$$D_2(n) = \frac{S_0 + \cdots + S_{n-1}}{S_0 + \cdots + S_{n-1} + nN}.$$

On peut montrer que $((\epsilon_{T_{n+1}}, S_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov récurrente positive. Le théorème ergodique assure alors la convergence presque sûre de $D_2(n)$ quand $n \to +\infty$.

Suggestions de développement

1. Pourquoi suspecte-on d'autres erreurs immédiatement après une première erreur ?
2. En supposant que F n'est pas réduit au singleton $\{0\}$, déterminer la limite de

$$\prod_{k=1}^{t} (1 - \epsilon_k)$$

quand $t \to +\infty$. Peut-on préciser la vitesse de convergence ?
3. Calculer $P[T_1 > t | (\epsilon_t)_{t \in \mathbf{N}^*}]$ et montrer que $P[T_1 = +\infty] = 0$. Montrer plus généralement que les instants T_n sont finis presque sûrement : il y a une infinité d'erreurs.
4. Retrouver ce résultat lorsque $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_r < 1$ en montrant que la suite définie par

$$C_t = \sum_{k=1}^{t} \mathbf{I}_{[Y_k = 0]} - t\alpha_1$$

est une sous-martingale dans la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{N}}$, avec $\mathcal{F}_t = \sigma((\epsilon_k)_{k \in \mathbf{N}}, Y_1, \ldots, Y_t)$, et en étudiant le comportement asymptotique de $(C_{t \wedge T_n})_{t \in \mathbf{N}}$.
5. D'où vient le fait que $((\epsilon_{T_{n+1}}, S_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est une chaîne de Markov ? Donner ses probabilités de transition. Justifier la convergence obtenue à l'aide du théorème ergodique.
6. Simuler le protocole sur un exemple simple : prendre par exemple $\alpha_1 = 0$ (atmosphère calme), $\alpha_2 = 0.1$ (atmosphère orageuse), $a_{1,1} = 0.99$ et $a_{2,2} = 0.9$.
7. Préciser les résultats lorsque F possède un seul élément (les probabilités ϵ_n sont déterministes et égales).