

1 Difficulté 1

1.1 Camembert

Sur une crêpe, en trois coups de couteaux, on peut faire 6 parts.

Mais sur un camembert, en trois coups de couteau, on peut faire 8 parts. Mais comment ?

Il faut donner un coup de couteau dans l'épaisseur du fromage.
Montrez comment on coupe la crêpe. Faites leur décrire la différence géométrique entre une crêpe et un camembert.

1.2 Les démolisseurs

Fairy Tail est une grosse entreprise de démolition. Quatre de leurs membres sont capables de détruire quatre maisons en quatre heures.

Combien faut-il de personnes pour détruire deux maisons en deux heures ?

Quatre personnes ! Si on leur donne deux fois moins de temps, elles détruiront deux fois moins de maisons.

1.3 Panique chez les animaux

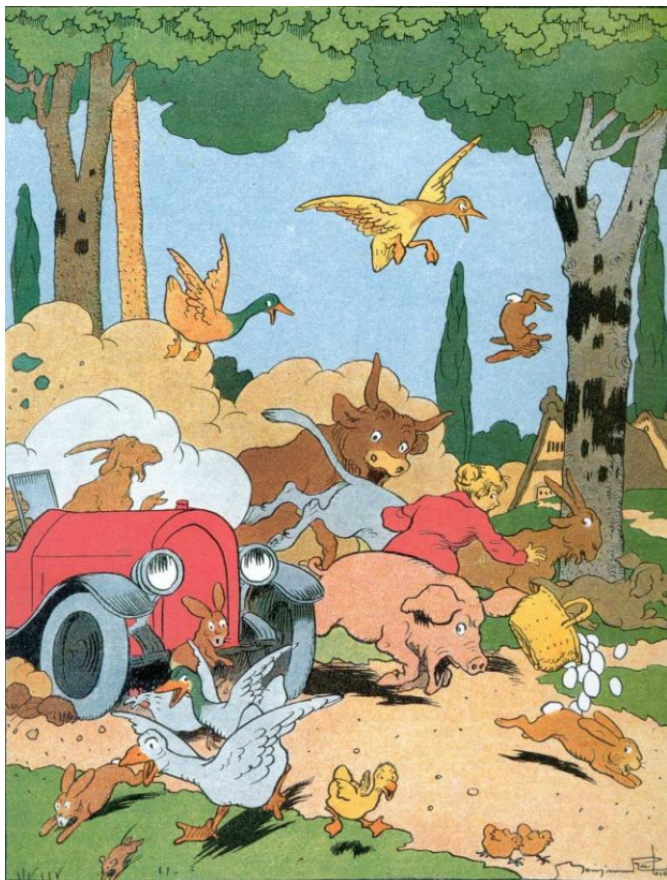
Combien y-a-il d'animaux sur ce dessin ?

Et combien de mammifères ?

Tous les animaux sont-ils des mammifères ?

Tous les mammifères sont-ils des animaux

Sur le dessin, y-a-il des êtres-vivant qui ne sont pas des animaux ?



Ce n'est pas un problème mathématique, c'est un problème sur la terminologie (scientifique et non scientifique).

Soulignons une ambiguïté : l'Homme (ici : la femme) est-il un animal ? On peut répondre oui ou non.

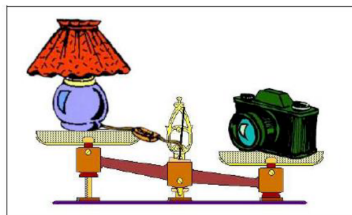
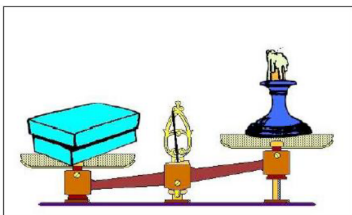
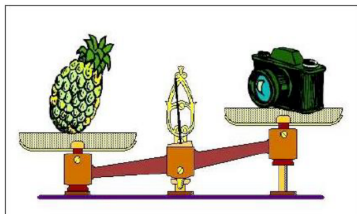
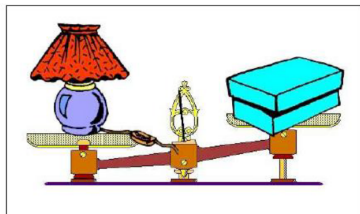
Et les oeufs ? Pour moi ce ne sont pas encore des animaux. Sont-ils vivant ? (débat éthique).

Parmi les êtres vivants, il faut compter les végétaux. Notons qu'on ne peut pas les dénombrer (pelouse).

Bref, vous avez de quoi discuter des heures avec les enfants.

1.4 Des objets sur une balance

Range les objets du plus léger au plus lourd.



1.5 Tintin, Haddock, Tournesol, Milou, Dupondt

À la foire de la brocante, Tintin, le capitaine Haddock, le professeur Tournesol, Milou et les Dupondt font chacun un achat différent : un tableau, une sculpture, un livre, un meuble, des timbres de collection. Trouve ce que chacun a acheté en utilisant les indications suivantes :

- Le professeur Tournesol a en horreur la peinture et la lecture.
- Les timbres ont été choisis par deux personnes portant presque le même nom.
- Ce n'est pas un homme qui s'est offert la sculpture.
- Le capitaine Haddock n'a pas résisté à la vue du portrait de son ancêtre.

Si on fait un tableau pour l'enfant, cela devient facile.

1.6 Le choc des générations

Au petit déjeuner, deux fils et deux pères mangent toujours une orange. Dans le pot il y a 3 oranges. Comment se fait-il que tout le monde en mange une ?

Il y a le fils, le père et le grand-père. Remarquez qu'il y a un indice dans le titre (éventuellement le signaler aux enfants)

1.7 Plus jeune, plus vieux

Six enfants veulent comparer leur âge : Il y a Thomas, Rose, Guillaume, Robert, Suzanne et Jean.

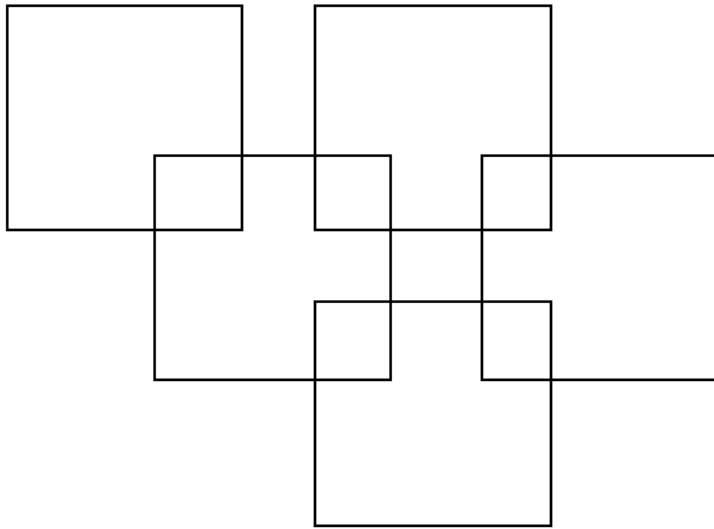
- Thomas est plus jeune que Rose, mais plus vieux que Guillaume et Robert.
- Robert est plus jeune que Guillaume.
- Rose est plus jeune que Suzanne, mais plus âgée que Robert.
- Robert est plus jeune que Jean.
- Suzanne est plus vieille que Rose, mais plus jeune que Jean.
- Jean est plus vieux que Thomas.

Range ces enfants du plus jeune au plus âgé.

En faisant des étiquettes, cela devient de difficulté 1.

1.8 Des rectangles dans un dessin

Combien de rectangles vois-tu sur cette figure ?



Il faut amener les enfants à s'organiser : en comptant d'abord les gros, puis les petits. On en trouve 11.

2 Difficulté 2

2.1 Quelle forme !

(niveau 1/2 ?) :

Colorie les chiffres à gauche de chaque flèche. Quelle est alors la signification du chiffre à droite de chaque flèche ?

$0 \longrightarrow 1$

$2 \longrightarrow 0$

$681 \longrightarrow 3$

$790 \longrightarrow 2$

$4830 \longrightarrow 3$

$9961 \longrightarrow 3$

Trouve alors le plus petit nombre X tel que

$X \longrightarrow 7$.

La logique de la suite est dans le titre : les nombres correspondent au nombre de boucles réalisées pour écrire ces nombres.

$X = 6888$.

Les petits malins feront $X = 0000000$ mais ce n'est pas vraiment un chiffre.

2.2 Mais quand est née la fermière ?

La fermière est née au siècle dernier ; pourtant, aujourd'hui elle n'est pas centenaire ; elle n'a même pas encore 50 ans ; mais son année de naissance est un multiple de 50.

En quelle année deviendra-t-elle centenaire ?

Quel age elle aura en 2030 ?

On pense d'abord qu'elle est née en 1950, mais elle aurait alors plus de 50 ans ? Donc elle est née en 2000 : et oui ! l'année 2000 c'est officiellement encore au XXIème siècle.
Son anniversaire de 100 ans sera en 2100. Pas de piège (à par le vocabulaire "centenaire").
En 2030 elle aura 20 ans en début d'année (avant l'anniversaire) et 30 ans en fin d'année (après l'anniversaire).

2.3 Suite de chiffres

Complétez les chiffres manquants :

25 - 26 - 28 - 31 - 35 - ... - 46 - 53 - 61

2 - 4 - 8 - 10 - 20 - 22 - ... - 46 - 92 - 94

+1,+2,+3 etc
+2,*2,+2,*2 etc

2.4 Nombre inconnu

Je suis un nombre à 3 chiffres.

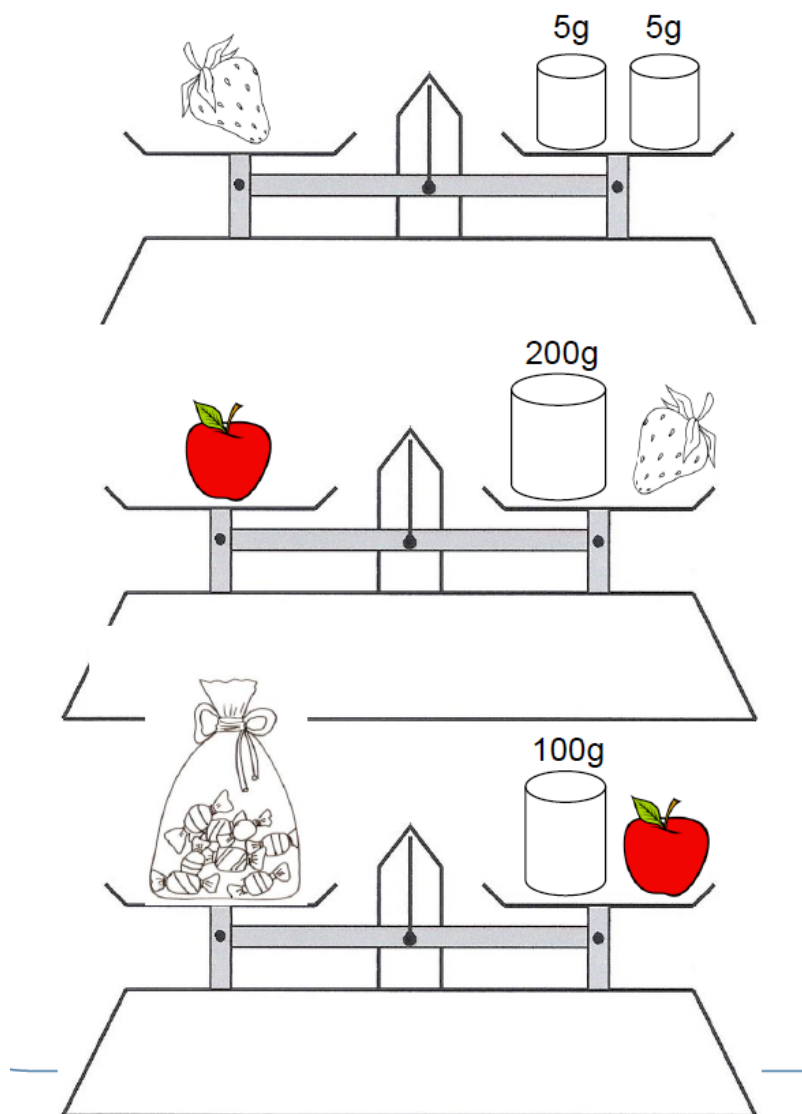
- Je suis plus grand que 203 et plus petit que 289.
- Mon chiffre des dizaines est le double de celui des centaines.
- La somme de mes 3 chiffres est 15.

Je suis ...

249

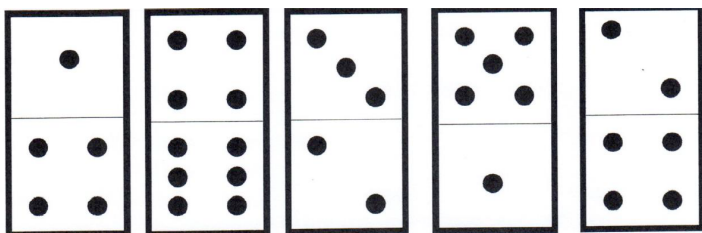
2.5 Bonbons à peser

Combien pèse le sac de bonbons en grammes ?



2.6 Dominos

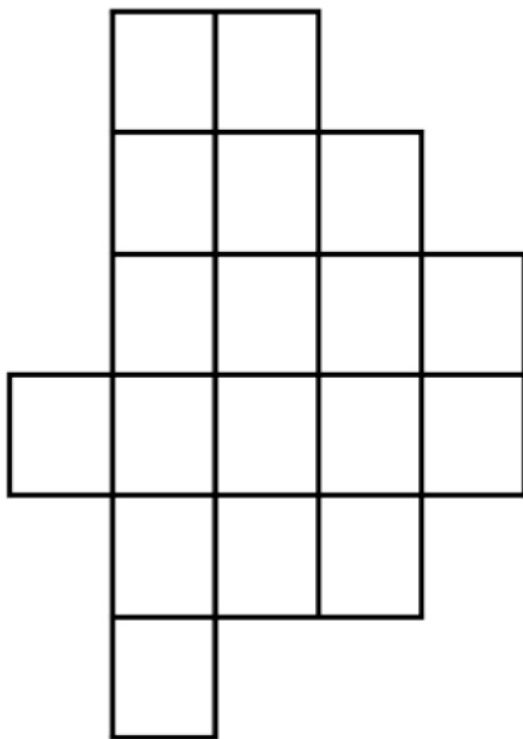
En bougeant le moins de dominos possible, fais en sorte que le nombre de points en haut soit identique au nombre de points en bas.



On peut aider en indiquant de compter les points dans la position actuelle. Il y en a 15 en haut et 17 en bas. Donc il faudrait en mettre 16 en haut et 16 en bas. On peut inverser les 2 et 3, ou bien les 3 et 5.

2.7 Partager son champ

Un agriculteur veut partager son champ en 3 parties pour ses 3 enfants, en étant le plus égalitaire possible. Attention : pour manœuvrer un tracteur, la forme du champ est importante (champ biscornu = temps perdu).



Il faut que les champs soient isomorphes. Cela peut-être l'occasion de parler des rotations/translations aux enfants.

Solution : un carré 2×2 avec 2 excroissances.

2.8 Éléphant et marche à pied

Oscar vend ses légumes chaque semaine sur le marché de la grande ville. Pour aller de son village à la ville à pied, et revenir à dos d'éléphant, il met 45 minutes. Pour faire l'aller-retour à dos d'éléphant il met 36 minutes.

Combien mettrait-il de temps pour faire l'aller-retour à pied ?

3 Difficulté 3

3.1 Partage de noix et Ecureuils en froid

Trois écureuils partent chercher des noix. Après une journée de travail ils en trouvent 20 et décident de les partager équitablement en fonction du nombre de personnes que chacun d'entre eux doit nourrir. Voici leur conversation :

Tic : " Je dois m'occuper de ma femme et ma fille. "

Tac : " J'ai la charge de quatre enfants. "

Toc : " Moi, je dois m'occuper de mon vieux père. "

Combien de noix recevra Tac ?

Après avoir partagé les noix qu'ils avaient récoltés, Tic, Tac et Toc apprennent que l'un d'eux ment tout le temps et qu'il a donc forcément menti pour récupérer plus de noix (les deux autres ne sont pas des menteurs). Ils commencent alors à se prendre la tête :

Tic : " Je suis sûr que c'est Tac qui ment ! "

Tac : " N'importe quoi ! Je jure que c'est Toc qui ment ! "

Toc : " Hey ! J'ai toujours dit la vérité moi ! "

Qui est le menteur ?

Il y a au total dix personnes à nourrir (il ne faut pas oublier Tic, Tac et Toc), ce qui fait 2 noix par personne à nourrir.

Tac recevra alors 10 noix.

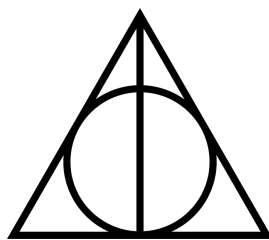
Il faut procéder méthodiquement. Si on suppose que Tic ment, alors Tac dit la vérité et Toc ment, ce qui donne deux menteurs au lieu d'un : l'hypothèse n'est pas valide. On en déduit que Tic dit la vérité, donc Tac ment et Toc dit la vérité.

C'est Tac le menteur !

Note : En plus c'est lui qui a rafflé la moitié des noix qu'ils avaient ramassés.

3.2 Les reliques de la mort

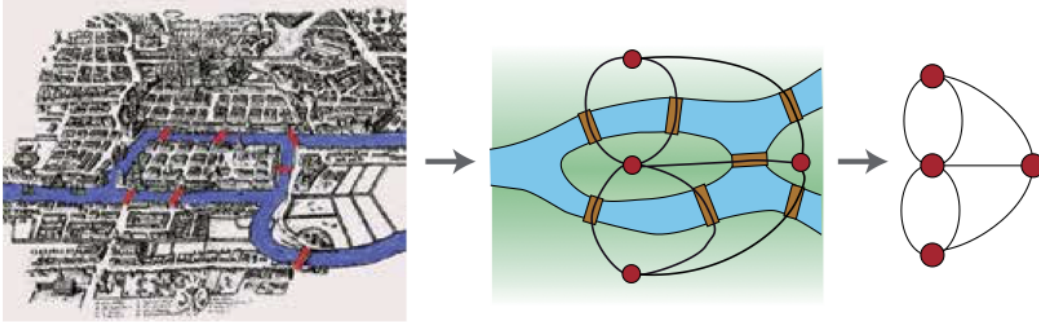
Peut-on dessiner le symbole des reliques de la mort d'un seul trait et sans repasser deux fois au même endroit ?



Oui.

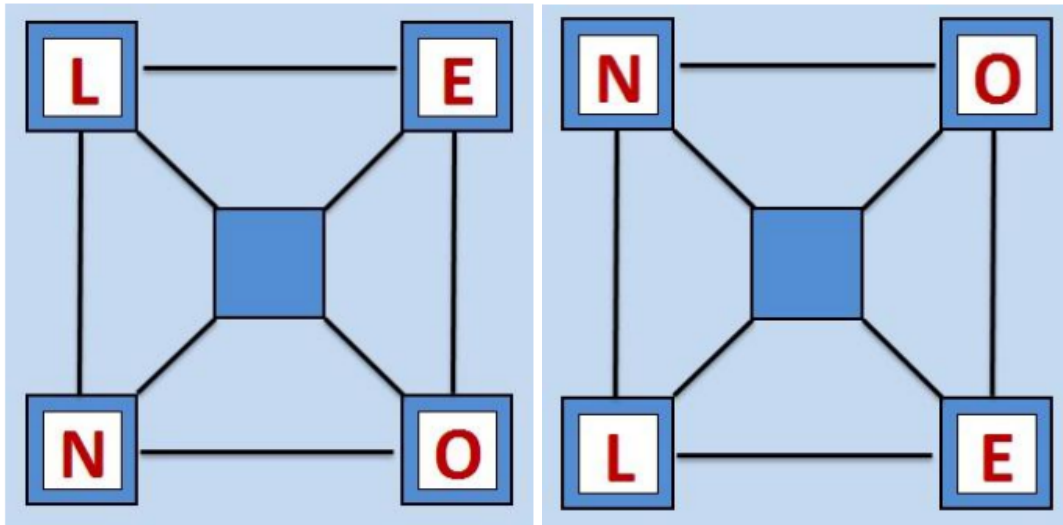
Plus précisément, quand on est face à ce type de problème, il faut compter le nombre de points d'où partent un nombre impair de traits. S'il y en a aucun ou seulement deux alors on peut dessiner la figure d'un seul trait (en prenant les points d'ordre impair comme origine et arrivée s'ils existent). Dans tous les autres cas, c'est impossible. Ici, il n'y a que deux points d'ordre impair (un d'ordre trois et un d'ordre cinq), donc la réponse est oui.

On peut embrayer sur les ponts de Koenigsberg.



3.3 De Léon à noel

Combien faut-il de mouvement pour passer de «leon» à «noel» dans les jeux de taquins ci-dessous. Et dans l'autre sens: combien de mouvements pour passer de «noel» à «leon»



Il faut que les enfants se fabriquent le jeu de taquin avec les moyens du bord (caillou, papier). Rappel des règles : les lettres doivent suivre les traits, et ne peuvent aller que sur des emplacements libres.

La seconde partie de la question, c'est l'occasion d'étaler sa science en fête :

Vous pouvez parler de symétrie, de déterminisme (qui permet de renverse le temps).

Exemple de situation symétrique simple : si je met 2 heures en train pour aller de Paris à Lyon, je me mets aussi 2 heures pour aller de Lyon à Paris. Et contre-exemple : si je met 1 heure pour monter en haut d'une colline...

Avec de la lumière : si je peux voir le regard de quelqu'un dans mon rétroviseur, alors il peut aussi voir mon regard.

Exemple de déterminisme : si je filme une boule de billard, en regardant la fin du film, je peux reconstituer le début etc.

3.4 Le Petit Poucet pose des graines sur l'escalier

Le Petit Poucet s'amuse dans un escalier. Il vide sa poche en posant les cailloux de la manière suivante :

- Un caillou sur la première marche.
- Deux cailloux sur la deuxième marche.
- Trois cailloux sur la troisième marche.
- Et ainsi de suite ...

Si l'escalier fait 5 marches, combien pose-t-il de cailloux ?

Et s'il en fait 10 ?

Et s'il en fait 100 ? Là cela devient urgent de trouver une manière maligne de les compter.

Faire la somme.

Mais, si pas trop de monde, c'est l'occasion d'enseigner la formule découverte par le petit Gauss :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

.

3.5 Dénombrer les billets de loterie gagnants

Un billet de loterie est composé de 3 étoiles alignées, qu'il faut gratter pour découvrir un motif. Dans chacune d'elle peut se trouver le dessin d'une fusée, d'une lune ou bien le mot "perdu". Un billet est gagnant lorsqu'il y a au moins 2 dessins identiques (et pas le mot "perdu" of course).

Combien de billets gagnants différents peut-il y avoir ?

On suppose que quand on tourne le billet, on n'a pas le même billet. Si les enfants supposent l'inverse, aucun problème. Il suffit qu'ils s'expliquent.

3.6 Un escargot qui monte et descend

Un matin, un escargot est tombé dans un puits de 12 mètres. Il escalade la paroi pour en sortir. Chaque jour il monte de 3 mètres, et chaque nuit il descend de 2 mètres parce qu'il glisse en dormant. Combien de temps met-il à sortir du puits ?

On peut commencer par répondre 12 jours (1 mètres de gagné par jour).

Mais on peut se dire que le dernier jour, il ne va pas s'endormir avant d'avoir franchi le rebord. Dans ce cas c'est 10 jours : $9+1$

On peut même être plus précis : 10 jours et 9 nuits.

3.7 Étiquettes avec des nombres en toutes lettres

Voici des étiquettes :

vingt	dix	quatre	cent	neuf	six
-------	-----	--------	------	------	-----

- En en collant 3 : Écris le plus grand nombre possible.
- En en collant 3 : Écris le plus petit nombre possible.
- En les collant toutes : Écris le plus grand nombre possible.
- En en collant autant que tu veux : Écris le plus grand nombre possible.

Sous-entendu : on n'a pas le droit d'utiliser 2 fois la même.

C'est l'occasion de dire qu'en comptant en français, on fait des additions et des multiplications.

Ce jeu serait moins marrant en belge/suisse (nonante, octante).

- En en collant 3 : Écris le plus grand nombre possible : 920
- En en collant 3 : Écris le plus petit nombre possible : 86
- En les collant toutes : Écris le plus grand nombre possible : 699
- En en collant autant que tu veux : Écris le plus grand nombre possible : 990

3.8 Multiplier des dés

On lance 4 fois un dé à 6 faces. On note n_1, n_2, n_3, n_4 les résultats. On note $k_4 = n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$ le produit de tous les lancers.

Est-ce que k_4 a plus de chances d'être pair ou impair ?

Sauriez-vous précisément calculer la probabilité qu'il soit pair ?

Et si maintenant on lance i fois le dé ?

Il faut d'abord remarquer qu'il suffit d'un seul dé pair pour que le produit soit pair. Donc la probabilité d'avoir un produit impair est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, et la proba d'avoir un produit pair est $1 - \frac{1}{16}$, ce qui est très probable.

Ensuite si les enfants connaissent la notation puissance, faites leur écrire la formule. Éventuellement faire une ouverture à la loi géométrique, en utilisant par exemple une pièce de monnaie non équilibrée.

Pour les parents accompagnants, et pour les très doués : ouverture au Théorème centrale limite, en sommant les dés plutôt qu'en les multipliant, la distributions des chiffres est proche d'une gaussienne. D'autant plus proche que le nombre de dés est grand.

4 Difficulté 4

4.1 Gros appétit

Une chenille commence à grignoter le premier volume d'une encyclopédie à la première page et termine son repas à la dernière page du dernier volume. Chaque page de couverture fait 1 cm et l'intérieur de chaque volume mesure 5 cm.

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

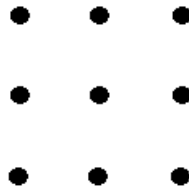
Quelle distance a parcouru la chenille ?

Attention au piège ! La chenille ne va dévorer que 4 des 6 tomes (si elle part de la première page du premier volume et qu'elle part vers la droite, son premier plat sera la couverture du tome 1).

Une fois le piège évité, il suffit de compter : la chenille a grignoté 10 pages de couverture et l'intérieur de 4 tomes. Elle a donc parcouru $10 \times 1 + 4 \times 5 = 30$ cm.

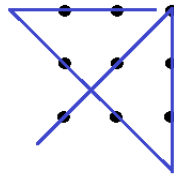
Note : Et une encyclopédie à la poubelle, une !

4.2 Think out of the box !



Comment relier ces 9 points avec une ligne brisée en quatre morceaux ?

Il faut penser hors de la boîte ! (Oui, c'est le titre de l'énigme.)



4.3 Le marchand de chevaux

Un marchand de chevaux basé à Blancherive doit livrer quatre chevaux à Rivebois. Cependant, il ne peut déplacer que deux chevaux à la fois (un qu'il chevauche et l'autre dont il tient la bride). De plus chaque cheval va à une vitesse différente : ils mettent 1, 2, 4 et 6 heures pour faire le trajet. Pendant le trajet, le cheval le plus rapide doit s'adapter au rythme du plus lent. Enfin, le vendeur n'a pas envie de faire le trajet à pied (ça prendrait beaucoup trop de temps), il est donc obligé d'emprunter un cheval pour chaque retour.

Combien de temps au minimum lui faut-il pour livrer tous les chevaux ?

L'idée est ici de déplacer les deux chevaux les plus lents en même temps (pour ne pas "perdre" trop de temps). Cependant, si on déplace les deux chevaux les plus lents en premier on devra en ramener un pour le trajet du retour, il faut alors amener les deux chevaux les plus rapides avant pour pouvoir les utiliser sur les trajets retour.

Ce qui nous donne le trajet suivant : Le marchand part avec les deux chevaux les plus rapides (2 heures de trajet) avant de revenir avec le plus rapide (1 heure). Ensuite on amène les deux plus lents (6 heures) avant de revenir avec le deuxième plus rapide (2 heures). Il ne reste alors qu'à ramener les deux chevaux qui restent (2 heures). Ce qui fait un total de $2 + 1 + 6 + 2 + 2 = 13$ heures.

Note : Il aurait pu demander à quelqu'un de l'aider, ça aurait été plus rapide... Mais au fait, comment va-t-il rentrer à Blancherive ?

4.4 Le retour du marchand

Un marchand de chevaux basé à Blancherive vient de livrer quatre chevaux à Rivebois, malheureusement il a complètement oublié de prévoir un moyen de locomotion pour rentrer chez lui. Dans la taverne du village, il rencontre quatre conducteurs de charrettes qui font le trajet entre Blancherive et Rivebois. Quand il leur demande lequel des quatre est le plus rapide, ils répondent ceci :

Alm : « Delthea est plus rapide que moi, mais demande 10 pièces d'or de plus. »

Boey : « Je suis beaucoup moins rapide qu'Alm et je fais payer autant que Delthea, mais avec moi vous arriverez en un seul morceau. »

Celica : « Je fais payer 50 pièces d'or, 30 de moins que Boey, en plus je suis un peu plus rapide que lui. »

Delthea : « C'est moi la plus rapide ! Mais j'ai pas envie d'aller à Blancherive aujourd'hui. »

Avec qui doit partir le marchand pour rentrer le plus vite possible à Blancherive, et combien va-t-il devoir déboursier ?

Il doit partir avec Alm.

Il faut exclure Delthea d'office, il reste alors seulement Alm, Boey et Celica. En recoupant ce que disent Boey et Celica, on comprend que Boey est le plus lent. Celica étant un peu plus rapide que lui et Alm l'étant beaucoup plus, on en déduit qu'Alm est le plus rapide des trois.

En ce qui concerne le prix, on sait qu'Alm demande 10 pièces de moins que Delthea, que Boey demande autant que Delthea et que Celica demande 30 pièces de moins que Boey. En compilant ces informations, on trouve qu'Alm demande 20 pièces de plus que Celica. Sachant que Celica fait le trajet pour 50 pièces d'or, on en déduit qu'Alm demande 70 pièces d'or.

Note : C'est pénible ces gens qui répondent aux questions en posant des énigmes !

4.5 Pinpin le lapereau

Pinpin est un jeune lapin qui aime beaucoup gambader. A la fin de la journée il se rend compte qu'il est à 20 mètres de son terrier et qu'il a tout intérêt à vite rentrer s'il ne veut pas se faire gronder par ses parents. Seulement voilà, Pinpin est très joueur, il décide de rentrer en ne faisant que des bonds de 2, 5, 7 ou 12 mètres.

Combien de bonds faut-il au minimum à Pinpin pour rentrer chez lui ?

Deux bonds suffisent ! Il ne fera simplement pas le trajet en ligne droite. Avec un bond de 12 mètres il peut se retrouver à précisément 12 mètres de chez lui.

Note : Il devrait s'engager dans un cirque avec des bonds aussi longs...

4.6 Le policier

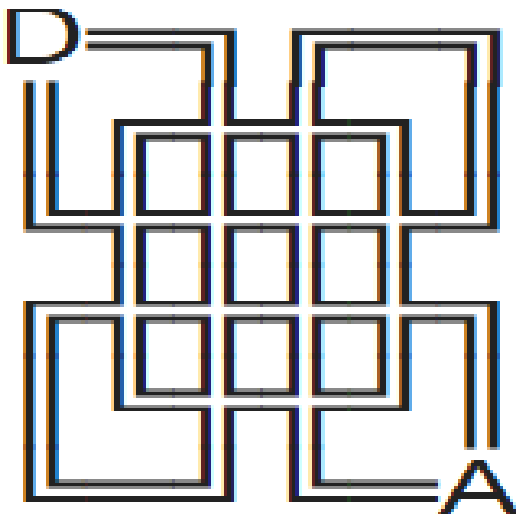
Marcel Patoulacci est brigadier chef (et agent de la paix avant tout). Ce matin il se rend au poste de police comme chaque samedi. Après deux cent mètres il se rappelle qu'il doit passer par le pressing pour récupérer une chemise. Il fait alors demi-tour, va chercher sa chemise et repart vers le poste. Il passe la journée au poste de police et rentre directement chez lui.

Si le poste et le pressing sont à huit cent mètres l'un de l'autre et que la maison de Marcel est entre les deux, quelle distance a parcouru le brigadier chef ?

Le mieux c'est de faire un dessin. Notons x la distance entre chez lui et le pressing. Marcel part donc de chez lui et fait 200 mètres avant de se retourner puis de faire $200 + x$ mètres dans l'autre sens. Une fois sa chemise récupérée, il fait 800 mètres pour aller au poste de police. Une fois ça journée terminée, il fait $800 - x$ mètres pour rentrer chez lui. Au total il aura marché $200 + 200 + x + 800 + 800 - x = 2000$ mètres dans la journée.

4.7 La fourmi

Une fourmi cherche à rentrer à la fourmilière après une dure journée de travail. Le problème c'est qu'elle a le choix entre beaucoup de chemins.



Si elle décide de n'aller que vers la droite ou le bas, combien de chemins peut-elle prendre ?

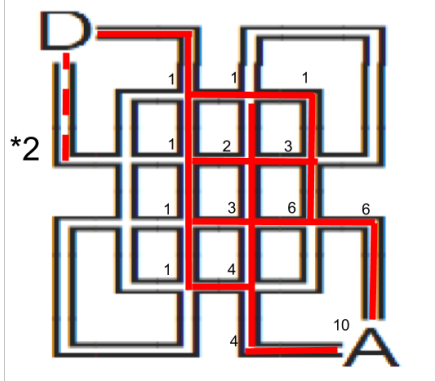
Il s'agit ici de pur dénombrement. Le meilleur moyen pour ne pas s'emmêler les pinceaux c'est de procéder méthodiquement.

Solution 1 : Une approche possible est de d'abord considérer le chemin où la fourmi prend toujours à droite, ensuite, on regarde la dernière intersection qu'elle a rencontré et on regarde ce qu'il se passe si elle prend vers le bas au lieu de la droite. Si elle arrive sans aller à gauche ou en haut, on a chemin de plus, on regarde ensuite les chemins où elle prend en bas deux intersections avant la fin, etc. On arrive ainsi à 20 chemins.

Note : On peut se simplifier la vie en remarquant que la symétrie permet de ne calculer que les chemins où la fourmi commence par la droite et de multiplier ce résultat par 2.

Solution 2 :

Une façon de trouver les 20 chemins : on fait comme dans le triangle de Pascal, on somme les chiffres de ses prédécesseurs. On utilise aussi la symétrie pour ne compter que la moitié des chemins



Demandez aux enfants comment ils se sont organisés dans ce problème.

4.8 Le chasseur

Un chasseur installe son camp pour préparer sa chasse. Une fois le camp monté, il décide de partir vers le sud. Après avoir marché 10 kilomètres, il n'a rien trouvé. Il change donc de direction et part vers l'est. Au bout d'un certain temps de marche, il trouve finalement un ours qu'il abat avant de rentrer au camp en le traînant pendant 10 kilomètres vers le nord.

De quelle couleur est l'ours ?

Notre chasseur vient de réaliser un triangle avec deux angles droits. Sur un plan c'est tout à fait impossible, mais sur une sphère ça marche.

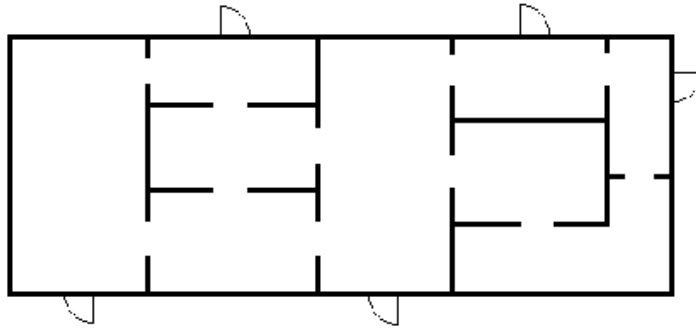
En réalité, son trajet n'est pas un triangle plat : quand on marche en direction de l'est (ou de l'ouest) on décrit plutôt un arc de cercle parallèle à l'équateur. C'est ce qu'a fait notre chasseur, et puisque qu'en marchant autant vers le nord que vers le sud, il a pu rentrer directement à son campement et fermer le triangle, celui-ci ne peut être situé qu'au pôle nord. L'ours est donc blanc, c'est un ours polaire.

Note : On se rappellera toutefois que l'ours polaire est une espèce menacée. Le chasseur est donc très vilain.

5 Difficulté 5

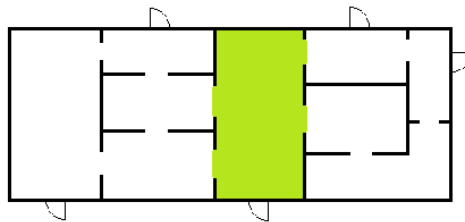
5.1 Au voleur !

Un voleur décide de cambrioler la villa de Miss Mary. Il souhaite passer par toutes les pièces, pour récupérer un maximum d'objets de valeur, mais ne veut passer par chaque pièce qu'une seule fois, pour mettre le moins de temps possible.



Quelle est la cinquième pièce qu'il visitera ?

En fait, peu importe le chemin que suivra le voleur, il sera obligé de passer par la salle centrale en cinquième. En effet, cette salle étant le seul lien entre la partie gauche et la partie droite de la villa, il devra nécessairement visiter toutes les salles d'un côté avant de passer par la salle centrale. Comme chaque côté de la villa possède quatre salles, la salle centrale sera forcément la cinquième.



Note : En plus ça ne vallait pas le coup, il n'a trouvé que des pendentifs en forme de papillons... avant de se faire pincer par Marcel Patoulacci.

5.2 Maisons mitoyennes

Combien de maisons mitoyennes peut-on dessiner au maximum sans lever le stylo et passer deux fois au même endroit ?



Une seule !

Plus précisément, quand on est face à ce type de problème, il faut compter le nombre de points d'où partent un nombre impair de traits. Si il y en a aucun ou seulement deux alors on peut dessiner la figure d'un seul trait (en prenant les points d'ordre impair comme origine et arrivé s'ils existent). Dans tous les autres cas, c'est impossible.

Ici, si on ne dessine qu'une maison, on n'a que deux points triples, on peut alors la dessiner. Par contre, à partir de deux maisons on a trois points triples et un point quintuple, il est donc impossible de les dessiner d'un seul trait.

5.3 Sur la route de Bacili

Ysakor part de Chérubelle en direction de Bacili pour aller voir son ami Puyzégur. Il avance à raison de 6 km/h. Après 20 minutes de marche il arrive devant Ablithia ; il continue sa route et 2 km plus loin il rattrape son amie Epica. En discutant avec elle, il apprend qu'elle est partie d'Ablithia au même moment qu'il est parti de Chérubelle et qu'elle se rend elle aussi à Bacili. Ysakor décide alors de l'accompagner et d'adapter sa vitesse à la sienne.

Bacili est à 6 km de Chérubelle. Dans combien de temps vont arriver Ysakor et Epica ?

Là, il y a beaucoup d'inconnues. Procédons méthodiquement : pour savoir dans combien de temps les deux amis vont arriver, il faut savoir à quelle vitesse ils vont et à quelle distance ils sont de Bacili.

Commençons par la distance : on sait que Chérubelle et Bacili sont à 6 km de distance, et qu'il y a 2 km entre Ablithia et leur point de rencontre. Il ne nous reste qu'à trouver la distance entre Chérubelle et Ablithia. Ysakor ayant fait le trajet en 20 minutes (soit $\frac{1}{3}$ d'heure) à 6 km/h, on en déduit que cette distance est de $6 \times \frac{1}{3} = 2$ km. Donc ils ne sont plus qu'à $6 - 2 - 2 = 2$ km de Bacili.

Reste à trouver la vitesse : Ysakor s'adaptant à la vitesse d'Epica, il faut donc la déterminer. On sait qu'Ysakor et Epica sont partis au même moment, donc en la même période de temps Ysakor a parcouru 4 km (entre Chérubelle et leur point de rencontre) et Epica seulement 2 km (entre Ablithia et leur point de rencontre). On en déduit qu'Epica est deux fois moins rapide que ne l'était Ysakor, elle allait donc à 3 km/h.

Connaissant ces deux informations, on en déduit que le temps qu'ils vont mettre pour parcourir 2 km à 3 km/h est de $\frac{2}{3}$ d'heure soit 40 minutes.

Note : Le premier à me donner le nom de l'univers dont est tiré cette énigme gagne un cookie.

5.4 rectangle augmenté

Si l'on diminue la longueur d'un rectangle de 4 cm et que l'on augmente sa largeur de 3 cm, on obtient un carré de même aire que le rectangle d'origine. Combien mesure le périmètre de ce rectangle ?

Soit x la longueur du côté du carré; les côtés du rectangle sont alors $x + 4$ et $x - 3$. Comme les aires sont égales, on a

$$x^2 = (x + 4)(x - 3)$$

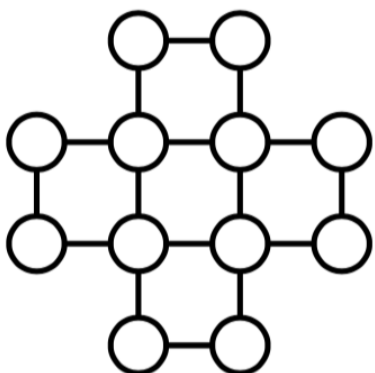
$$x^2 = x^2 + x - 12$$

$$x = 12 \text{ cm.}$$

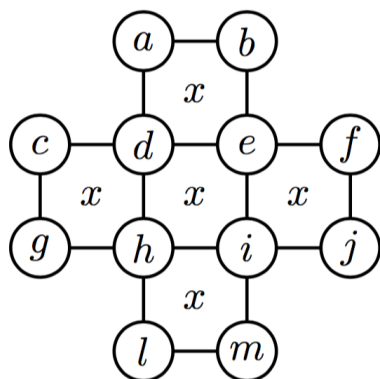
Les côtés du rectangle sont donc $x + 4 = 16$ cm et $x - 3 = 9$ cm et son périmètre est $2 \times (16 + 9) = 50$ cm.

5.5 La croix magique

Placer les nombres de 1 à 12 de façon que la somme des nombres placés sur les sommets de chaque carré soit toujours la même. Quelle est la valeur de cette somme ?



Soient $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l$ et m les nombres placés dans les sommets comme dans la figure ci-dessous et x la valeur de la somme des nombres dans les sommets de chaque carré.

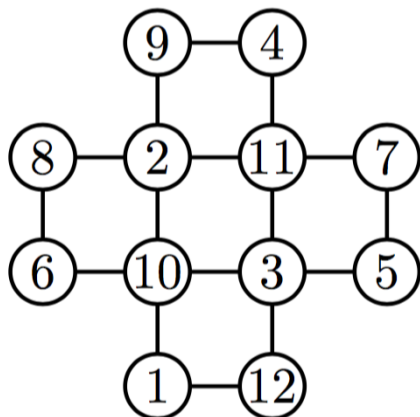


Nous avons

$$\begin{aligned} 4x &= a + b + c + 2d + 2e + f + g + 2h + 2i + j + l + m \\ &= (1 + 2 + \dots + 12) + (d + e + h + i) \\ &= 78 + x \end{aligned}$$

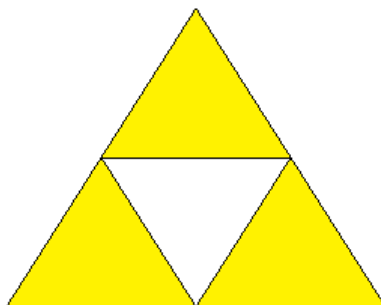
donc $x = 26$.

Une solution possible est :



5.6 Dans les ruines

Link se trouve dans les ruines du temple du vent. Il doit traverser ces ruines pour trouver un ancien artéfact permettant de sauver son royaume. Face à lui se tient un mur gigantesque sur lequel est dessiné le symbole suivant



Si le côté du grand triangle mesure 4 mètres, quelle est l'aire de la partie colorée ?

On peut trouver le résultat de plusieurs façons : une façon de faire est de déterminer l'aire d'un des trois triangles et de multiplier par 3. Chaque petit triangle faisant $4/2 = 2$ mètres de côté, leur hauteur est de $\sqrt{2^2 - (2/2)^2} = \sqrt{3}$ mètres (par le théorème de Pythagore) et donc leur aire est de $\frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ mètres carrés, soit une aire totale de $3\sqrt{3}$ mètres carrés.

Une autre possibilité est de déterminer l'aire du grand triangle, l'aire dorée étant $\frac{3}{4}$ de l'aire du grand triangle. Sa hauteur est de $2\sqrt{3}$ mètres, par un calcul identique à celui pour les petits triangles. On obtient alors l'aire du grand triangle : $\frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ mètres carrés, d'où une aire de $\frac{3}{4} \times 4\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ mètres carrés pour la partie dorée.

Note : Pas sûr que ça serve beaucoup à notre héros...

5.7 L'âge du capitaine

Le X -ième jour du Y -ième mois de l'année $1900 + Z$ un navire fait naufrage. Il avait U cheminées, V hélices et W membres d'équipage. Si on fait le produit $XYZUVW$ auquel on rajoute la racine cubique de l'âge du capitaine (qui est grand-père) on obtient 4.002.331.

Quel est l'âge du capitaine ? (On peut aussi trouver X, Y, Z, U, V et W)

« Trop d'inconnues ! » se dit-on. En fait, il suffit d'étudier en détail chaque cas. Vu que tous les nombres sont entiers, il en va de même pour la racine cubique de l'âge du capitaine. Le capitaine peut donc avoir 1, 8, 27, 64 ou 125 ans, difficilement plus (sauf si c'est le capitaine Barbossa du Black Pearl...). On exclut aussi très vite les hypothèses 1 an et 8 ans. On pourrait douter de la légitimité des hypothèses 125 ans, un âge en réalité jamais atteint par personne, et 27 ans, étant donné que le capitaine est grand-père, mais sait-on jamais.

Pour chacune de ces hypothèses on obtient les valeurs suivantes du produit $XYZUVW$: 4 002 328, 4 002 327 et 4 002 326. En décomposant en facteurs premiers ces trois nombres, on se rend compte que seul 4 002 327 peut s'écrire comme produit de six facteurs : $4\,002\,327 = 3 \times 3 \times 7 \times 17 \times 37 \times 101$. Le capitaine avait donc 64 ans.

Note : Ce bateau de 3 cheminées et 3 hélices a donc sombré le 17 juillet 1937 avec à son bord 101 membres d'équipage. C'est très triste.

6 Difficulté 6

6.1 a et b

Les nombres entiers a et b sont strictement supérieurs à 1 et leur produit est 2010. Si a est pair, quelle est la plus grande valeur possible pour a ?

La factorisation en nombres premiers de 2010 est $2 \times 3 \times 5 \times 67$ et comme $a = \frac{2010}{b}$, pour maximiser a nous devons minimiser b . Si b était pair, alors 4 diviserait 2010 (puisque nous savons que a est pair), ce qui n'est pas le cas. Sachant maintenant que b doit être impair, sa valeur est $b = 3$ (le plus petit diviseur impair de 2010), ce qui donne $a = \frac{2010}{3} = 670$.

6.2 Les nains

Il était une fois cent nains particulièrement intelligents et extrêmement arrogants. Un jour une sorcière décide de les punir en les pétrifiant tous. Elle veut cependant les mettre au défi : une fois pétrifiés elle va coller une pastille rouge ou bleue dans le dos de chacun, après quoi les nains devront deviner la couleur de la pastille qu'ils ont dans le dos. Ils n'auront le droit de dire qu'un mot : « rouge » ou « bleu ». La sorcière promet de les libérer si 99 nains répondent correctement.

Comment doivent faire les nains pour échapper à la sorcière ?

L'idée ici est d'utiliser des congruences : on va encoder l'information de la façon suivante, "rouge"=0 et "bleu"=1. L'idée est que seul le premier nain a le droit de se tromper, mais que sa réponse doit contenir la totalité des informations sur les autres pastilles, il doit pour cela voir le dos de tous les autres nains. Les nains doivent donc se placer en ligne de sorte que chaque nain voit la pastille dans le dos de tous les nains devant lui.

Le premier nain, au fond de la file, va alors faire la somme des informations des autres pastilles (0 pour rouge et 1 pour bleu : il va donc simplement compter le nombre de pastilles bleues) et prendre le résultat modulo 2 (et donc 0 si il y a un nombre pair de pastilles bleues et 1 si il y en a un nombre impair) avant d'annoncer la couleur correspondante (prenant ainsi le risque de se tromper).

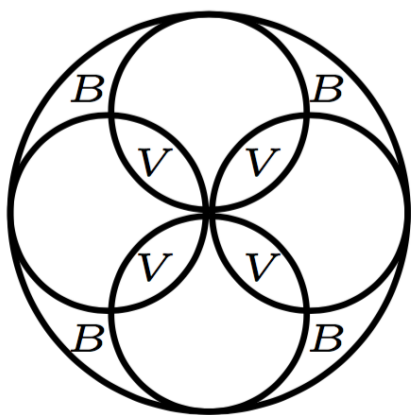
Le nain suivant fait alors lui aussi la somme des informations qu'il voit, prend le résultat modulo 2 et le compare avec le précédent : si c'est le même, ça veut dire que sa pastille correspond à la valeur 0 (rouge), sinon c'est 1 (bleue).

Et ainsi de suite : chaque nain compare la somme qu'il calcule avec le résultat annoncé par le premier nain et prenant soin de tenir compte des pastilles déjà annoncées. Par exemple, si un nain compte 13 pastilles bleues, que les nains avant lui (sauf le premier) ont annoncé 42 pastilles bleues et que le premier a annoncé un nombre pair de pastilles bleues (en disant « rouge ») alors notre nain a forcément une pastille bleue.

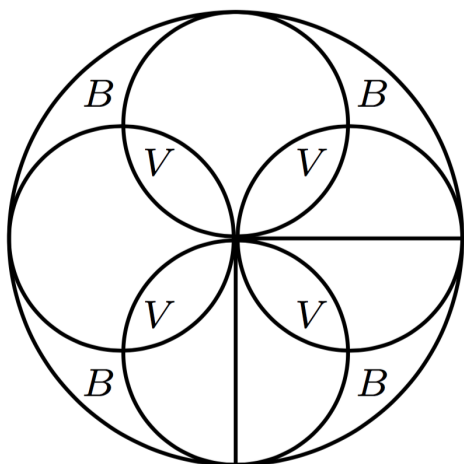
Note : On peut généraliser en prenant un nombre fini de pastilles au lieu de deux.

6.3 Rosace

Pour faire cette rosace, on a utilisé 400 cm² de cristal vert (V). Combien de centimètres carrés de cristal bleu (B) ont-ils été nécessaires ?



Traçons deux rayons perpendiculaires et observons ce qu'il se passe dans un quart de rosace. Appelons R le rayon de la rosace. Alors les petits cercles ont un rayon de $\frac{R}{2}$. Nommons B et V les aires des régions bleue et verte respectivement. L'aire du quart de rosace délimité par les deux rayons se calcule de deux façons, d'où l'égalité :

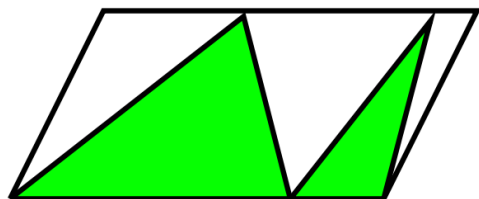


$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\pi R^2 &= 2 \left(\frac{1}{2}\pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right) - V + B \\ \frac{1}{4}\pi R^2 &= \frac{1}{4}\pi R^2 - V + B \\ V &= B\end{aligned}$$

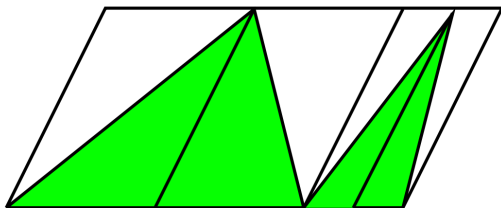
Par conséquent, l'aire recouverte de cristal bleu est égale à l'aire recouverte de cristal vert. Ainsi, 400 cm² de cristal bleu seront nécessaires.

6.4 parallélogramme

Dans le parallélogramme, trouver le rapport entre l'aire de la surface coloriée et l'aire de la surface blanche.



Les côtés opposés d'un parallélogramme étant parallèles, les hauteurs des triangles coloriés sont égales entre elles et sont aussi égales à celles des triangles blancs. De plus, la somme des bases des triangles blancs est égale à la somme des bases des triangles coloriés.



Nous en déduisons que la somme des aires des triangles blancs est égale à la somme des aires des triangles coloriés. Le rapport d'aires est donc de 1.

6.5 Âges dans la famille

Une famille est composée d'un père, d'une mère et de leurs enfants. La moyenne d'âge de toute la famille est 20. Le père a 48 ans et la moyenne des âges de la mère et des enfants est égale à 16. Combien d'enfants y a-t-il dans cette famille ?

Notons S la somme de tous les âges et n le nombre d'enfants. Comme il y a $n + 2$ personnes dans la famille et que la moyenne des âges est 20, alors $20 = \frac{S}{n+2}$, d'où $S = 20(n + 2)$. De plus, l'âge du père est 48 ans et la moyenne des âges de la mère et des enfants est 16, donc $\frac{S-48}{n+1} = 16$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S - 48 &= 16(n + 1) \\ 20(n + 2) - 48 &= 16n + 16 \\ 20n - 8 &= 16n + 16 \\ 4n &= 24 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Il y a donc 6 enfants dans cette famille.

6.6 Parc safari

Dans le zoo de Parmanie on trouve la plus grande collection d'espèces de la région. Aujourd'hui, dans l'infirmierie les vétérinaires sont débordés. Ils doivent soigner des Tauros (sorte de taureaux avec trois queues), des Dodrios (des drôles d'oiseaux à trois têtes et sans queue), des Kangoureux (créatures bipèdes avec une queue) et des Funécires (n'ayant qu'une tête montée sur un seul pied).

On compte 36 pattes, 19 queues et 20 têtes. Combien y a-t-il de créatures dans l'infirmierie ?

Il y a deux façons de faire : soit on pose les équations, soit on tâtonne en essayant d'ajuster le nombre de telle ou telle créature à chaque essai. Posons les équations : on note T , D , K et F le nombre de Tauros, Dodrios, Kangoureux et Funécires. On a alors les équations

$$4 \times T \times 2 \times D + 2 \times K + 1 \times F = 36 \quad (1)$$

$$3 \times T \times 0 \times D + 1 \times K + 0 \times F = 19 \quad (2)$$

$$1 \times T \times 3 \times D + 1 \times K + 1 \times F = 20 \quad (3)$$

Il faut alors trouver une combinaison linéaire qui donne $T + D + K + F$. Le mieux c'est de commencer par les lignes 1 et 3 et de se focaliser sur les Dodrios et Funécires pour commencer, on pourra ajuster après avec la ligne 2 qui ne charge pas ces variables. En faisant $2 \times (1) - (3)$ on trouve la valeur de $7 \times T + D + 3 \times K + F$. Il ne reste alors qu'à soustraire deux fois la deuxième ligne pour trouver $T + D + K + F = 14$.

Note : On peut aussi remarquer que pour chaque créature, $(\text{nombre de pattes}) \times 2 - (\text{nombre de queues}) \times 2 - (\text{nombre de têtes}) = 1$. On retrouve alors exactement la combinaison linéaire donnant le nombre de créatures : $36 \times 2 - 19 \times 2 - 20 = 14$.

6.7 Jeu de tarot

Shulk, Fiora et Reyn jouent au tarot. Un jeu de tarot est composé de 78 cartes (14 pour chacune des 4 couleurs plus 22 atouts), parmi ces cartes trois valent beaucoup de points, on les appelle les « bouts ». En début de partie Shulk distribue 24 cartes à chacun et laisse 6 cartes de côté.

Quelle est la probabilité que Fiora ait les trois bouts dans son jeu ?

Un peu de dénombrement ?

Comptons le nombre de jeux que Fiora peut avoir avec trois bouts : il faut nécessairement les trois cartes dans son jeu, les autres étant piochées au hasard parmi les 75 restantes, il existe $\binom{75}{21}$ mains contenant les trois bouts. Pour obtenir le nombre total de mains possibles on raisonne de la même façon : il faut prendre 24 cartes parmi 78, ce qui nous donne $\binom{78}{24}$ possibilités.

En prenant le quotient, on obtient finalement une probabilité de $\frac{22 \times 23 \times 24}{76 \times 77 \times 78}$ soit environ 2,66 %.

Note : Cette problème suit exactement la loi hypergéométrique dont la description est : soit un ensemble de taille N (ici 78) où des éléments ont une probabilité p (ici $\frac{3}{78}$) de vérifier une certaine propriété (ici « être un bout »). Alors la loi décrit le nombre d'éléments vérifiant la propriété dans un échantillon de taille n (ici 24). Si X est le nombre de bouts dans le jeu de Fiora, la formule générale est :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{pN}{k} \binom{(1-p)N}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

6.8 La conquête du donut spatial

Trois astronautes sont envoyés pour coloniser un astéroïde en forme de bouée (un tore). Malheureusement, ils se disputent pendant le voyage et une fois arrivés ils refusent d'habiter sous le même toit. Ils décident alors de construire trois maisons les plus éloignées possible les unes des autres. Par contre, ils n'ont qu'une réserve d'eau, une autre d'électricité et une d'oxygène. Ils doivent placer des câbles pour connecter chacune des maisons aux trois réserves mais les câbles ne peuvent pas se croiser ni se chevaucher.

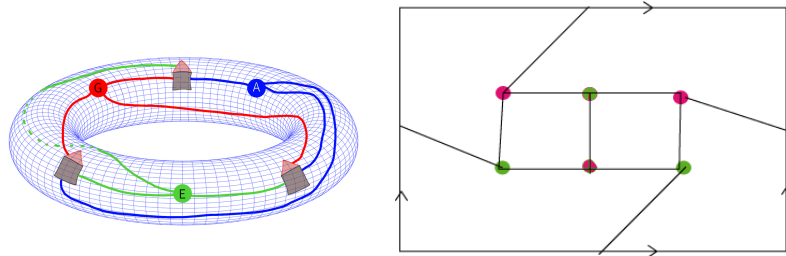
Comment les trois astronautes doivent-ils placer les câbles ?

Alors là, sans dessin ça va être dur...

Une idée serait de placer une source à côté de chaque maison, que l'on relie à la maison d'à côté. On prend ensuite une maison et on tire un câble dans une direction jusqu'à la prochaine source. On fait la même chose dans le même sens pour les deux autres.

Pour les dernières connexions, on va utiliser la forme particulière du tore : on tire les câbles dans la direction inverse de la précédente et on passe « par-dessous » les autres câbles.

Mouais... Un dessin vaut quand même mieux qu'un long discours :



Ouverture : vous pouvez parler du théorème qui dit qu'un graphe est planaire si et seulement si il ne contient ni K_5 (le graphe à 5 sommets tous reliés entre eux) ni $K_{3,3}$ (3 sommets d'un côté, 3 sommets de l'autre, tous les sommets d'un côté étant relié avec ceux de l'autre). Dans ce problème, le graphe à placer était $K_{3,3}$. Donc, heureusement que ces 3 astronautes ne sont pas allés sur une planète plate.